常微分方程知识点整理*

2021-2022 学年第一学期 强基计划（数学类）

目录

*本复习资料整理了截止至第四章 30 种方程的解法，并未收录解的存在性等定理方面的内容，部分过于抽象的方程解法以例题的形式给出.

2 一阶线性方程

2.1 线性方程

方程 1 (线性方程).

$$y' + p(x)y = g(x).$$

解法.

$$\begin{aligned} &\left(ye^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\right)' = \left(y' + p(x)y\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = g(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \\ \Longrightarrow\ & y = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int g(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

方程 2 (Bernoulli 方程).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1).$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \\ \Longrightarrow\ & y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \\ \xRightarrow[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]{z = y^{1-n}}\ & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad (\text{线性方程}). \end{aligned}$$

2.2 变量可分离方程

方程 3 (变量可分离方程).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

解法.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(y)} \implies g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \implies \int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

方程 4 (齐次方程).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x}).$$

解法.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x}) \xRightarrow{z = \frac{y}{x}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = F(z) \quad (\text{变量可分离方程}).$$

方程 5 (可化为齐次方程的方程)**.**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}).$$

解法. 当 $c=c_1=0$ 时，此方程就是齐次方程.

当 $c^2+c_1^2\neq 0$ 且 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，二元方程组

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

有唯一解 $x=\alpha$，$y=\beta$，令 $x=\xi+\alpha$，$y=\eta+\beta$，方程可化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}.$$

当 $c^2+c_1^2\neq 0$ 且 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$，则存在实数 λ 使得

$$a_1=\lambda a,\quad b_1=\lambda b \quad 或 \quad a=\lambda a_1,\quad b=\lambda b_1,$$

不妨设是前者，令 $z=ax+by$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a+bf(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}).$$

方程 6 (特殊方程)**.**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c).$$

解法.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c) \xRightarrow{z=ax+by} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a+bf(z+c) \quad (变量可分离方程).$$

2.3 全微分方程

方程 7 (全微分方程)**.**

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

满足 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 或存在 $F(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}F(x,y) = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y$.

解法. 设 $F(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)$，则

$$\mathrm{d}F(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\varphi'(y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y,$$

解得 $\varphi(y)$，带入 $F(x,y)$ 中，则方程的通解为

$$F(x,y)=C.$$

方程 8 (存在仅依赖于 x 的积分因子的微分方程)**.**

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y,$$

满足 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ 仅与 x 有关.

解法. 积分因子为

$$\mu(x)=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\mathrm{d}x\right),$$

此时方程

$$\mu(x)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程.

方程 9 (存在仅依赖于 y 的积分因子的微分方程)**.**

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

满足 $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ 仅与 y 有关.

解法. 积分因子为

$$\mu(y)=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mathrm{d}y\right),$$

此时方程

$$\mu(y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程.

注记. 以上两种方程的求解公式过于复杂，考试时建议自行推导求解公式，以下给出方程*8* 解法的公式推导：

设 $\mu(x)$ 是微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

的积分因子，则

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \implies \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + \mu' N,$$

解 μ 关于 x 的一阶线性方程可得方程*8* 的求解公式.

解法 (常用积分因子)**.** 方程

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0.$$

的常见积分因子为 $\frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2-y^2}$，因为

$$\begin{aligned} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x =& xy\mathrm{d}\left(\log|\frac{y}{x}|\right), \\ =& (x^2+y^2)\mathrm{d}\left(\arctan\left(1+\frac{y}{x}\right)\right), \\ =& (x^2-y^2)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\log|\frac{x+y}{x-y}|\right), \end{aligned}$$

当微分方程中出现 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ 时，可以尝试上述三式.

方程 10 (分组求积分因子)**.**

$$(x^3y - 2y^2)\mathrm{d}x + x^4\mathrm{d}y = 0.$$

解法. 首先将方程分组为

$$(x^3y\mathrm{d}x + x^4\mathrm{d}y) - 2y^2\mathrm{d}x = 0,$$

利用积分因子分别求解两组的通积分可得

$$x^3y\mathrm{d}x + x^4\mathrm{d}y = x^3\mathrm{d}(xy), \quad y^2\mathrm{d}x = y^2\mathrm{d}x,$$

从而

$$x^3\mathrm{d}(xy) = 2y^2\mathrm{d}x \implies \frac{1}{(xy)^2}\mathrm{d}(xy) = \frac{2}{x^5}\mathrm{d}x,$$

对右侧等式两边积分可得方程的通解.

2.4 变量替换法

本节主要凭借观察，无具体的通用解法.

方程 11 (Riccati 方程)**.**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

解法. 若知道方程的一个特解 $y = \phi(x)$，则令 $y = z + \phi(x)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \phi'(x) = P(x)(z + \phi(x))^2 + Q(x)(z + \phi(x)) + R(x),$$

由于 $y = \phi(x)$ 是一个解，带入消去相关项后得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (2P(x)\phi(x) + Q(x))z + P(x)z^2 \quad (\textit{Bernoulli}\ 方程).$$

2.5 一阶隐式微分方程

方程 12 (可解出 y 的方程)**.**

$$y = f(x, y').$$

解法. 引进参数 $p = y'$，则方程变为

$$y = f(x, p),$$

将上式两边同时对 x 求导，得

$$p = y' = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

此时方程转化为关于 p 和 x 的显式微分方程，如果可以求出上述方程的通解

$$p = \varphi(x, c), \quad c为常数,$$

则带入可得原方程的通解

$$y = f(x, \varphi(x, c)).$$

注记. 不要直接对 p 求积分得到 y，以免引入多余的常数量.

方程 13 (可解出 x 的方程)**.**

$$x = f(y, y').$$

解法. 注意到

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right),$$

故只需将 x 看作关于 y 的函数，然后便可视为方程*12* 求解.

方程 14 (Clairaut 方程)**.**

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

其中 $\varphi(z)$ 二阶连续可微且 $\varphi''(z) \neq 0$.

解法. 令 $y' = p$ 并对 x 求导得

$$\begin{aligned} p &= p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \varphi'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ \Longrightarrow &\ (x + \varphi'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0, \end{aligned}$$

当 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ 时，有 $p = C$，因此通解为

$$y = Cx + \varphi(C),$$

当 $x + \varphi'(p) = 0$ 时，有特解

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -\varphi'(p)p + \varphi(p) \end{cases}.$$

注记. 有时为了方便起见，可以用

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = g(p) \end{cases}$$

来表示方程的通解，这里的 p 被看作自由变动的常数，而非因变量 y 关于自变量 x 的导函数，这种表示方法实质上是一个参数方程.

方程 15 (不显含 x 或 y 的方程)**.**

$$F(y, y') = 0 \quad 或 \quad F(x, y') = 0.$$

解法. 右侧方程可以使用方程*13* 中的方法转化为左侧方程，因此只讨论不显含 x 的方程的解法.

引进参数 $p=y'$，则方程变为

$$F(y,p)=0,$$

引入参数 t 将上式用参数曲线表示为 $y=\psi(t),p=h(t)$，由参数的微分法知

$$h(t)=p=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

故

$$\varphi'(t)=\frac{\psi'(t)}{h(t)} \implies \varphi(t)=\int\frac{\psi'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t+C,$$

于是方程的解为

$$\begin{cases} x=\int\frac{\psi'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t+C, \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

注记. *方程15 的解法过于抽象，以下给出一个例子：*

$$x\sqrt{1+(y')^2}=y'.$$

解：令 $y'=\tan t,t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，则 $x=\sin t$，由于

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\tan t\cos t\mathrm{d}t=\sin t\mathrm{d}t,$$

故积分可得

$$y=\int\sin t\mathrm{d}t=-\cos t+C,$$

故原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\sin t \\ y=-\cos t+C \end{cases},$$

消去参数 t，得到通解为

$$x^2+(y-C)^2=1.$$

3 二阶及高阶微分方程

3.1 可降解的高阶方程

方程 16 (不显含未知函数 x 的方程)**.**

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0.$$

解法. 令 $x^{(k)} = y$，则

$$F(t, y, y', \cdots, y^{n-k}) = 0,$$

降解后的方程如果可求解，将解

$$x^{(x)} = y = \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$$

求积分可得原方程的解.

方程 17 (不显含自变量 t 的方程)**.**

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0.$$

解法. 用 $y = x'$ 作为新的未知函数，而把 x 当作新的自变量，则

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\
&\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\
&\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},
\end{aligned}$$

用数学归纳法易得，$x^{(k)}$ 可用 $y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}x^{k-1}} (k \leq n)$ 表出，将这些表达式带入原方程可得

$$F\left(x, y, y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots\right) = 0,$$

即有新方程

$$G\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = 0.$$

注记. 新方程比原方程降低了一阶.

方程 18 (全微分方程和积分因子)**.**

$$F\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0$$

, 其中左端是某个与 $n-1$ 阶导数有关的表达式

$$\Phi\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

对 t 的全导数，即

$$F\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right),$$

此时称该方程为全微分方程.

解法. 显然方程

$$\Phi\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)=c_1$$

是 $n-1$ 阶的，只需求出上述方程的解就可以得到原方程的解.

注记. 有时方程*18* 本身不是全微分方程，但乘以一个适当的因子

$$\mu\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

后能成为全微分方程，此时就称 μ 为方程的积分因子，下面是一个例子：

$$x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=0.$$

解：积分因子为 $\mu=\dfrac{1}{x^2}$，此时，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)&=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=0\\ \Longrightarrow\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=c_1\implies x=c_2e^{c_1t}.\end{aligned}$$

3.3 线性齐次常系数方程

方程 19 (常系数齐次线性方程)**.**

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+a_nx=0.$$

解法. 记

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

为常系数线性齐次方程的特征方程，它有 n 个根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，每个根对应方程的一个解，以下分情况讨论：

若 λ_j 是实单根，则方程的一个解为

$$e^{\lambda_jt},$$

若 λ_j 是负单根，记 $\lambda_j=\alpha+i\beta$，由于 $F(\lambda)$ 为实多项式，故 $\overline{\lambda_j}=\alpha-i\beta$ 也是一个负单根，从而方程的两个解为

$$\begin{aligned}e^{(\alpha+i\beta)t}&=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),\\ e^{(\alpha-i\beta)t}&=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t),\end{aligned}$$

从而对应的两个实值解为

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

若 λ_j 是 k 重根，则对应的 k 个解为

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_j t},$$

若 λ_j 是 k 重复根，则 $\overline{\lambda_j}$ 也是 k 重复根，沿用复单根情况时使用的记号，则它们对应的 $2k$ 个解为

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

综合以上四种情况，可以得到方程的 n 个线性无关的解

$$x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

则方程的通解为

$$x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n.$$

方程 20 (Euler 方程)**.**

$$t^n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_nx = 0.$$

解法. 令 $t = e^u$，记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$，下面用数学归纳法证明

$$t^k\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = D(D-1)\cdots(D-k+1)x.$$

当 $k=1$ 时，

$$t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = Du,$$

若命题对 k 成立，则

$$\begin{aligned}
t^{k+1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}x}{\mathrm{d}t^{k+1}} &= t^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}\right) = t^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^k}D(D-1)\cdots(D-k+1)x\right)\\
&= t^{k+1}\left(-\frac{k}{t^{k+1}}D(D-1)\cdots(D-k+1)x + \frac{1}{t^k}D^2(D-1)\cdots(D-k+1)x\right)\\
&= D(D-1)\cdots(D-k+1)(D-k)x,
\end{aligned}$$

因此换元后方程化为常系数齐次线性方程.

注记. 教材中并未给出换元后方程的具体形式（也即数学归纳法的部分）.

方程 21 (降阶法)**.**

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0,$$

已知 $x = x_1(t)$ 是方程的解.

解法. 令 $x = x_1(t)y$，得方程

$$y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + b_n(t)y = 0,$$

由于 $x = x_1(t)$ 是原方程的解，所以 $y = 1$ 是新方程的解，带入得 $b_n(t) = 0$，因此新方程为

$$y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t)y' = 0,$$

令 $u = y'$ 可将方程降低为 $n-1$ 阶.

注记. 特别地，当二阶方程降阶为一阶方程后就可求出与 $x_1(t)$ 线性无关的解

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{x_1^2}\mathrm{d}t.$$

3.4 线性非齐次常系数方程

方程 22 (待定系数法)**.**

$$L[x] = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + qx = f(t),$$

其中 $f(t)$ 是指数、正余弦或多项式.

解法. 当 $f(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$ 时，可取特解形式为

$$\varphi(t) = \begin{cases} B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n, & q \neq 0, \\ t(B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n), & q = 0, p \neq 0, \\ t^2(B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n), & q = 0, p = 0, \end{cases}$$

带入方程并比较同次幂的系数可求得特解 $\varphi(t)$,

当 $f(t) = (b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n)e^{\alpha t}$ 时，令 $x(t) = e^{\alpha t}y(t)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + (2\alpha + p)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (\alpha^2 + p\alpha + q)y = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n,$$

使用上一种情况的方法可求得特解，

当 $f(t)=(A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}(A(t),B(t)$ 为多项式*)* 时，由 *Euler* 公式可得

$$x''+px'+qx=\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}+\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t},$$

记 $f_1(t)=\dfrac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}$，则 $f(t)=f_1(t)+\overline{f_1(t)}$，使用上一种情况的方法求得方程

$$x''+px'+qx=f_1(t)$$

的一个复特解 $\varphi_1(t)$，则 $\overline{\varphi_1(t)}$ 是方程

$$x''+px'+qx=\overline{f_1(t)}$$

的一个复特解，故由解的叠加原理可知，

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\overline{\varphi_1(t)}=\mathrm{Re}\varphi_1(t)$$

是原方程的一个实特解，

使用方程*19* 的解法得到对应齐次方程的解 $\phi(t,c_1,\cdots,c_n)$，则方程的通解为

$$x=\phi(t,c_1,\cdots,c_n)+\varphi(t).$$

注记. 解的叠加定理：设 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 分别是方程

$$L[x]=f_1(t)\quad 和\quad L[x]=f_2(t)$$

的特解，则 $\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ 是方程

$$L[x]=f_1(t)+f_2(t)$$

的特解*.*

4　微分方程组

4.1　微分方程组的概念

方程 23 (高阶微分方程的微分方程组形式)**.**

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

解法. 令 $y=y_1, y'=y_2, \cdots, y^{(n-1)}=y_n$，则上式可化为微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \end{cases}$$

因此第三章的方程大都可以用本章的方法解决.

4.2 微分方程组的消元法和首次积分法

方程 24 (消元法)**.**

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}.$$

解法. 逐个消去一些未知函数化为高阶方程求解，最后再代回得到方程组的解.

保留 y_2 消去 y_1 得

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(y_2' + y_2\right),$$

对上式两边关于 x 求导，则

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_2'' + y_2'),$$

带入原方程组消去 y_1' 可得

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0,$$

求得以上线性齐次微分方程的通解

$$y_2 = (c_1 + c_2 x)e^x,$$

再带入后得到

$$y_1 = \frac{1}{2}(2c_1 + c_2 + 2c_2 x)e^x.$$

注记. 不要将通解 y_2 带入

$$y_1' = 3y_1 - 2y_2,$$

并求上述高阶微分方程的解，因为这样既增加了计算量，也引入了多余的常数量 c_3.

方程 25 (微分算子法)**.** 定义微分算子 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，算子多项式为

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n,$$

试求方程组

$$\begin{cases} L_1 x_1 + L_2 x_2 = g_1(t), \\ L_3 x_1 + L_4 x_2 = g_2(t). \end{cases}$$

解法. 用算子 L_3 作用于第一个方程的两边，用算子 L_1 作用于第二个方程的两边，得

$$\begin{cases} L_3 L_1 x_1 + L_3 L_2 x_2 = L_3 g_1(t), \\ L_1 L_3 x_1 + L_1 L_4 x_2 = L_1 g_2(t), \end{cases}$$

由上面的第二个方程减去第一个方程得

$$(L_1 L_4 - L_3 L_2) x_2 = L_1 g_2(t) - L_3 g_1(t),$$

这是仅依赖于 x_2 的一个高阶微分方程，可使用第三章方法求解.

方程 26 (首次积分法)**.** *(1)* $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \end{cases}$， *(2)* $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$.

解法. *(1)* 将两个方程相加得

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = x + y,$$

以 $x + y$ 作为一个未知函数，积分得

$$x + y = c_1 e^t,$$

再将两个方程相减得

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = -(x - y),$$

以 $x - y$ 作为一个未知函数，积分得

$$x - y = c_2 e^{-t},$$

由此得到方程组的解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \\ y = \dfrac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t}). \end{cases}$$

(2) 两个方程乘以 x 和 y，相加得到

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

即有

$$\mathrm{d}(x^2+y^2)=-2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)\mathrm{d}t,$$

把 x^2+y^2 看作未知函数，积分得

$$\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)e^{2t}=c_1,$$

再利用原方程可得

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(x^2+y^2),$$

即有

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=-\mathrm{d}t,$$

由此得到另一个首次积分

$$\arctan\frac{y}{x}+t=c_2,$$

采用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，带入得

$$\begin{cases}r=\dfrac{1}{\sqrt{1-c_1e^{-2t}}}\\ \theta=c_2-t\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=\dfrac{\cos(c_2-t)}{\sqrt{1-c_1e^{-2t}}}\\ y=\dfrac{\sin(c_2-t)}{\sqrt{1-c_2e^{-2t}}}\end{cases}.$$

方程 27 (利用微分方程组的对称形式求首次积分)**.**

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y},\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{yz}.\end{cases}$$

解法. 将方程组写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz}=\frac{\mathrm{d}y}{xz}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y},$$

由左边第一个等号可知

$$x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y\implies x^2-y^2=c_1,$$

由合比定理可得

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{z(x+y)}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y}\implies x+y-\frac{z^2}{2}=c_2.$$

注记. 将方程组写成对称形式的优点在于可以利用比例的许多性质，例如

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\implies\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d},\quad\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

4.4 常系数齐次线性微分方程组

方程 28.

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

解法. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，则方程的通解为

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\alpha}_n e^{\lambda_n t}.$$

注记. 若 $\boldsymbol{A}$ 有复特征根，依据以上方法可以求出复值解 $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$，则实向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都是方程的解.

若 $\boldsymbol{A}$ 有 k 重特征根 $\lambda_1 (k \geq 2)$ 且 λ_1 对应的特征子空间维数为 *1*，设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 λ_1 对应的特征子空间的一个基，则存在令

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

成立的向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 使得

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{\alpha}_1 t e^{\lambda_1 t}$$

是方程组的两个线性无关的解. 此外，如果 $k \geq 3$，则还存在 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2$$

且

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{\alpha}_2 t^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{\alpha}_1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t}$$

是方程组与 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都线性无关的一个解.

若 $\boldsymbol{A}$ 有 k 重特征根 $\lambda_1 (k \geq 3)$ 且对应的特征子空间的维数为 *2*，即对 λ_1 有两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$，则一定存在不全为零的常数 β_1 和 β_2 以及向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3 = \beta_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \beta_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

使得

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 e^{\lambda_1 t}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 e^{\lambda_1 t} + (\beta_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \beta_2\boldsymbol{\alpha}_2) t e^{\lambda_1 t}$$

是方程的三个线性无关的解.

方程 29 (常系数齐次线性微分方程组).

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

解法.

$\left(e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}\right)' = e^{-\boldsymbol{A}t}\left(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right) = 0 \implies e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \implies \boldsymbol{x} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c}$为 n 维常数列向量).

注记. 矩阵的指数函数定义为

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{A}t)^n}{n!},$$

求解 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的方法有很多种，以下给出两种常用求法：

(i) 若通过其他方法求得方程的一个基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，则

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0).$$

(ii) 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)\boldsymbol{P}_k,$$

其中 $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{P}_k = (\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \lambda_{k-1}\boldsymbol{I})\cdots(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})(k = 1, \cdots, n)$，$r_{k+1}(t)$ 是方程组

$$\begin{cases} r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t), \\ r_{k+1}'(t) = r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t), k = 1, \cdots, n-1, \end{cases}$$

满足初始条件

$$r_1(0) = 1, r_2(0) = 0, \cdots, r_n(0) = 0$$

的解.

4.5 常系数非齐次线性微分方程组

方程 30 (常系数非齐次线性方程组).

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}(t).$$

解法.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}(t) \\ \implies &\left(e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}\right)' = e^{-\boldsymbol{A}t}\left(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right) = e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}(t) \\ \implies &\boldsymbol{x} = e^{\boldsymbol{A}t}\left(\boldsymbol{c} + \int e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$