现代数学基础

NB

实变函数期末复习

Final Review of Real Analysis

2021-2022 学年第二学期 强基计划（数学类）

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

目录

第一章　集和直线上的点集

1.1　集和集的运算

定义 1 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，记

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

并分别称为这一列集的**上限集**和**下限集**. 若 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，则称 A_n 的极限存在[1]，记为 $\lim_n A_n$.

定理 2 沿用定义 1.1 的条件，则

1. $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 当且仅当 x 在无限多个集 A_n 中；
2. $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 当且仅当 x 在除了有限多个以外的所有 A_n 中.

1.2　映照与势

定义 3

1. 如果 A 和 B 对等（之间存在双射），那么称 A 和 B 具有相同的**势**（或**基数**）. 记集 A 的势为 $\overline{\overline{A}}$，A 和 B 具有相同的势时，记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.
2. 如果 A 对等与 B 的某个子集 B_1，那么称 A 的势小于等于 B 的势，或 B 的势大于等于 A 的势. 记为 $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{A}} \ge \overline{\overline{B}}$；如果 $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}} \ne \overline{\overline{B}}$，那么称 A 的势小于 B 的势，或 B 的势大于 A 的势，记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$.

定理 4(Bernstein 定理) $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A}} \ge \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

---

[1] 单调递增或递减的集列极限存在.

1.4 直线上的点集

$\boxed{\textbf{定义 5}}$ 设 G 是直线上的开集. 如果开区间 $(\alpha, \beta) \subset G$，而且端点 α, β 不属于 G，那么称 (α, β) 为 G 的一个**构成区间**. 又设 A 是直线上的闭集. 称 A 的余集 $A^c = \mathbb{R} - A$ 的构成区间为 A 的**余区间**.

定理 6(开集和闭集的构造)

1. 直线上任意一个非空开集可以表示成有限个或可列个互不相交的构成区间的并集. 又当非空开集表示成互不相交的开区间的并时，这些开区间必是构成区间.
2. 直线上的闭集 F 或是全直线，或是从直线上挖掉有限个或可列个互不相交的开区间（即 F 的余区间）所得到的的集.

$\boxed{\textbf{定义 7}}$ 设 A 是直线上点集，x_0 是直线上一点，如果在 x_0 的任何一个环境 (α, β)（包含 x 的开区间）中，总含有集 A 中不同于 x_0 的点，即 $((\alpha, \beta) - \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$. 那么称 x_0 是 A 的**极限点**. 点集 A 的极限点全体所成的集称为 A 的**导集**，记为 A'.

$\boxed{\textbf{定义 8}}$ 设 A 是直线上点集，$x_0 \in A$. 如果 x_0 有一个环境 (α, β)，其中除 x_0 外不含有 A 中的点，即 $((\alpha, \beta) - \{x_0\}) \cap A = \varnothing$，称 x_0 是 A 的**孤立点**. 如果非空点集 A 中所有点都是孤立点，称 A 是**孤立集**.

$\boxed{\textbf{定义 9}}$ A 是一个点集，称 $\overline{A} = A \cup A'$ 为 A 的**闭包**. 闭包是包含 A 的最小闭集，即包含 A 的所有闭集之并.

$\boxed{\textbf{定义 10}}$ 如果 $A \subset A'$，称 A 为**自密集**. 如果 $A' = A$，称 A 是**完全集**. 完全集就是自密闭集，也就是没有孤立点的闭集.

$\boxed{\textbf{定义 11}}$ 设 A, B 是直线上的两个点集，如果 B 中每个点的任一环境中必有 A 中的点，那么称 A 在 B 中**稠密**. 当 B 时全直线时，即 A 在全直线上稠密（也即 $\overline{A} = \mathbb{R}$）时，称 A 是**稠密集**.

$\boxed{\textbf{定义 12}}$ 设 S 是直线上点集. 如果点集 S 在每个非空开集中都不稠密，就称 S 是**疏朗集**或**无处稠密集**.

例 13(Cantor 集) 将闭区间 $[0, 1]$ 三等分，去掉中间的一个开区间 $I_1^{(1)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$，

把剩下的两个闭区间 $[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]$ 分别再三等分，再各去掉中间的开区间：

$$I_1^{(2)}=(\frac{1}{9},\frac{2}{9}),\quad I_2^{(2)}=(\frac{7}{9},\frac{8}{9}),$$

余下四个闭区间

$$[0,\frac{1}{9}],[\frac{2}{9},\frac{3}{9}],[\frac{6}{9},\frac{7}{9}],[\frac{8}{9},1],$$

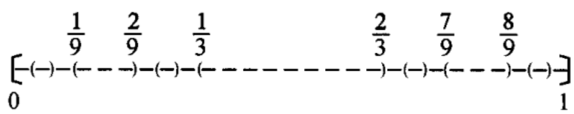
又分别把这些闭区间三等分，再各去掉中间的开区间：

$$\begin{aligned}I_1^{(3)}&=(\frac{1}{27},\frac{2}{27}),\quad I_2^{(3)}=(\frac{7}{27},\frac{8}{27}),\\ I_3^{(3)}&=(\frac{19}{27},\frac{20}{27}),\quad I_4^{(3)}=(\frac{25}{27},\frac{26}{27}),\end{aligned}$$

这样继续下去，在第 n 次三等分时去掉的开区间（称为 n 级区间）是

$$I_1^{(n)}=(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}),I_2^{(n)}=(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}),\cdots,I_{2^{n-1}}^{(n)}=(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}),$$

令 $O_c=\bigcup\limits_{n,k}I_k^{(n)}$，这是一个开集，所以 $K=[0,1]-O_c$ 是闭集，称 K 是 **Cantor 集**.



Cantor 集是疏朗完全集，与 $\mathbb{R}$ 等势，并且是 Lebesgue 零测集.

注. 本节几乎都是定义，很多定理都没有给出，因为它们在之后的内容中使用频率较低或者已经在数分中出现过，但 Cantor 集是一个非常重要的例子. 事实上本节是泛函分析中度量空间一节的 $\mathbb{R}$ 版本.

第二章　测度

2.1　集类

$\boxed{\textbf{定义 14}}$ 设 X 是一个集，$\boldsymbol{R}$ 是 X 上的集类，如果对任何 $\{E_k\}_1^n \subset \boldsymbol{R}$ 都有

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \boldsymbol{R}, \quad E_1 - E_2 \in \boldsymbol{R},$$

那么就称 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的**环**. 若还满足 $\boldsymbol{R}$ 中一列集 $\{E_n\}_1^\infty$ 的并也在 R 中，则称 $\boldsymbol{R}$ 是 σ–环（σ–代数）.

若将 $E_1 - E_2$ 改为 E_1^c 也成立，则称 $\boldsymbol{R}$ 为（σ–）**代数**或（σ–）**域**.

注. 环是对有限并和差运算封闭的集类，代数是对有限并和余运算封闭的集类，代数必是环，而一个环是代数当且仅当 $X \in \boldsymbol{R}$. 任意个环（代数）的并仍是代数，因此对任意集类 $\boldsymbol{E}$ 存在一个包含 $\boldsymbol{E}$ 的最小环（或代数），这个环记为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$. 类似的，包含 $\boldsymbol{E}$ 的最小 σ–环记为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$，显然有 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$.

$\boxed{\textbf{例 15}}$ $\boldsymbol{R}_0$ 是 $\mathbb{R}$ 中有限个左开右闭的有限区间的并集 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ 全体所成的集类. 那么 $\boldsymbol{R}_0$ 是一个环.

$\boxed{\textbf{定义 16}}$ 设 $\boldsymbol{M}$ 是 X 上的集类. 如果对 $\boldsymbol{M}$ 中任何单调序列 $\{E_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n \in \boldsymbol{M}$，那么称 $\boldsymbol{M}$ 是**单调类**. 对任意集类 $\boldsymbol{E}$，包含 $\boldsymbol{E}$ 的最小单调类记为 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{E})$.

注. σ–环必是单调类，单调环必是 σ–环.

$\boxed{\textbf{定理 17}}$ 设 $\boldsymbol{R}$ 是一个环，则 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$.

2.2 环上的测度

定义 18 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的环，$\mu:\boldsymbol{R}\to[0,\infty]$，如果 μ 满足

1. $\mu(\varnothing)=0$;
2. 可列可加性：互不相交的一列集 $\{E_n\}\in\boldsymbol{R}$，如果 $\bigcup_n E_n\in\boldsymbol{R}$，则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

那么 μ 就称为环 $\boldsymbol{R}$ 上的**测度**，称 $\mu(E)$ 是 E 的测度.

性质 19(测度) 如果 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，那么具有下列性质.

1. 有限可加性:如果互不相交的 n 个集 $\{E_k\}_1^k\subset\boldsymbol{R}$,那么 $\mu(\bigcup_1^n E_k)=\sum_1^n\mu(E_k)$.
2. 单调性：如果 $E_1,E_2\in\boldsymbol{R}$ 且 $E_1\subset E_2$，那么 $\mu(E_1)\le\mu(E_2)$.
3. 可减性：如果 $E_1,E_2\in\boldsymbol{R}$，$E_1\subset E_2$ 且 $\mu(E_1)<\infty$，那么 $\mu(E_2-E_1)=\mu(E_2)-\mu(E_1)$.
4. 次可列可加性：如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，且 $E\subset\bigcup_1^\infty E_n$，那么 $\mu(E)\le\sum_1^\infty\mu(E_n)$.
5. 如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，且 $E_1\subset E_2\subset\cdots$，$\bigcup_1^\infty E_n\in\boldsymbol{R}$，那么 $\mu(\bigcup_1^\infty E_n)=\lim_n\mu(E_n)$.
6. 如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，且 $E_1\supset E_2\supset\cdots$，$\bigcup_1^n E_n\in\boldsymbol{R}$，并且至少有一个 E_n 使 $\mu(E_n)<\infty$，那么
$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

   此外，如果 $\boldsymbol{R}$ 本身是 σ–环，那么还具有下面的性质:

7. 如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，那么 $\mu(\liminf_n E_n)\le\liminf_n\mu(E_n)$.
8. 如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，并且存在自然数 k 使得 $\mu(\bigcup_k^\infty E_n)<\infty$，那么 $\mu(\limsup_n E_n)\le\limsup_n\mu(E_n)$.
9. 如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，$\lim_n E_n$ 存在，并且存在自然数 k 使得 $\mu(\bigcup_k^\infty E_n)<\infty$，那么 $\mu(\lim_n E_n)\le\lim_n\mu(E_n)$.
10. 如果 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，并且存在自然数 k 使得 $\sum_k^\infty\mu(E_n)<\infty$，那么 $\mu(\limsup_n E_n)=0$.

2.3 测度的延拓

定义 20 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的环，记

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})=\{E|E\subset X,\text{ 存在 }\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}\text{ 使}E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\}.$$

易证 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 是 σ–环. 若 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，记 $\mu^*:\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})\to[0,\infty]$,

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)|\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}\text{ 且 }E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\},$$

称 μ^* 为由测度 μ 引出的**外测度**.

性质 21(外测度) 由环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ 所引出的外测度 μ^* 具有下列性质:

1. $\mu^*(\varnothing)=0$;
2. 非负性：对任何 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}),\mu^*(E)\geq 0$;
3. 单调性：若 $E_1,E_2\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 且 $E_1\subset E_2$，则 $\mu^*(E_1)\leq\mu^*(E_2)$;
4. $\mu^*\mid_{\boldsymbol{R}}=\mu$.
5. 次可列可加性：若 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，则

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n).$$

定义 22 设 μ^* 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ 所引出的外测度，$E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$. 如果 E 满足 **Caratheodory 条件**:

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E),\quad\forall F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}),$$

则称 E 为 μ^* 可测集. 全体 μ^* 可测集所成集合记为 $\boldsymbol{R}^*$.（可以证明 $\boldsymbol{R}^*$ 是 σ–环）

定义 23 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，如果 $\boldsymbol{R}$ 中的任何 μ–零测集的任何子集都属于 $\boldsymbol{R}$，那么称 μ 是一个**完全测度**.

定理 24 μ^* 是 $\boldsymbol{R}^*$ 上的完全测度.（称 μ^* 是 μ 的**延拓**或**扩张**）

定义 25 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上测度. 如果 $E\in\boldsymbol{R}$ 使 $\mu(E)<\infty$，那么称 E 有**有限测度**. 如果任何 $E\in\boldsymbol{R}$ 都有有限测度，那么就称 μ 是**有限的**. 如果 $X\in\boldsymbol{R}$ 且 $\mu(X)<\infty$，那么就称 μ 是**全有限的**.

如果 $E \in \boldsymbol{R}$ 且存在 $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$，每个 E_n 都有有限测度且 $E \subset \bigcup_1^\infty E_n$，那么称 E 的测度是 σ–**有限的**，相应的可以定义 σ–有限和全 σ–有限的测度.

定理 26(测度延拓唯一性定理) 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的 σ–有限测度，μ_1, μ_2 是 σ–环 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 上的测度. 若 $\mu_1|_{\boldsymbol{R}} = \mu_2|_{\boldsymbol{R}} = \mu$，则 $\mu_1 = \mu_2$. 即环 $\boldsymbol{R}$ 上的 σ–有限测度 μ 在 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 上的延拓是唯一的.

定理 27 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上 σ–有限测度，则 μ^* 也是 $\boldsymbol{R}^*$ 上 σ–有限测度.

定理 28 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的 σ–有限测度, 那么 $\boldsymbol{R}^*$ 中集的一般形式是 $(F \cup N_1) - N_2$，其中 $F \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$N_1, N_2$ 是 μ^*–零测集.[1]

定理 29 设 μ 是 σ–环 $\boldsymbol{R}$ 上的 σ–有限测度，$\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中 μ–零测集的一切子集全体. 则

1. $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{N})$;
2. 对任何 $E \in \boldsymbol{R}^*$，存在 $F \in \boldsymbol{R}, N_1, N_2 \in \boldsymbol{N}$ 使得 $E = (F \cup N_1) - N_2$;
3. 上一点中的 E, F 满足 $\mu^*(E) = \mu(F)$.

2.4 Lebesgue 测度、Lebesgue–Stieltjes 测度

定义 30 设 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是右连续的单调递增函数，定义

$$g((a,b]) = g(b) - g(a),$$

再设 $A \subset \mathbb{R}$ 定义

$$g^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} g((a_k, b_k]), \quad \text{其中} A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k],$$

则 g^* 为 $\mathbb{R}$ 上的外测度，g^*–可测集称为 **Lebesgue–Stieltjes 可测集，**并记它们所构成的 σ–环为 $\boldsymbol{L}^g$，$g^*|_{\boldsymbol{L}^g}$ 为 **Lebesgue–Stieltjes 测度**，记为 g，$\{\mathbb{R}, \boldsymbol{L}^g, g\}$ 为测度空间. 特别地，当 $g(x) = x$ 时，记为 $\{\mathbb{R}, \boldsymbol{L}, m\}$，并称作Lebesgue 测度空间.[2]

[1] 本定理有很多种形式，这里只给出一种.

[2] 该定义并不完整或严谨，但便于记忆，一维完整版本参考教材，n 维完整版本参考 Elias M. Stein 的 Real Analysis 第一章.

性质 31(Lebesgue 测度) 设 $\{\mathbb{R}^n, \boldsymbol{L}, m\}$ 为测度空间，则

1. 平移不变性：设 $A \in \boldsymbol{L}, b \in \mathbb{R}^n$，则 $A+b$ 可测，且 $m(A+b) = m(A)$.
2. 旋转不变性：设 $A \in \boldsymbol{L}$, R 是 $\mathbb{R}^n$ 上的旋转变换，则 $R(A)$ 可测，且 $m(R(A)) = m(A)$.
3. 正则性：设 $A \in \boldsymbol{L}$，则

$$\begin{aligned} m(A) &= \inf\{m(O) : A \subset O \text{ 且 } O \text{ 为开集}\} \\ &= \sup\{m(K) : K \subset A \text{ 且 } K \text{ 为紧集}\}. \end{aligned}$$

4. 以下四个命题等价：
   (a) $A \subset \mathbb{R}^n$Lebesgue 可测；
   (b) $\forall \varepsilon > 0$，存在开集 $O \supset E$ 使得 $m^*(O - E) < \varepsilon$；
   (c) $\forall \varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subset A$ 使得 $m^*(E - F) < \varepsilon$.
   (d) $\forall \varepsilon > 0$，存在开集 O 和闭集 F 使得 $F \subset E \subset O$ 且 $m(O - F) < \varepsilon$.

注. 所谓 $\mathbb{R}^n$ 上的旋转变换就是就是一个 n 阶方阵 R 使得 $R^T R = E_n$，也就是线性代数中的正交矩阵. 此外，旋转不变性有一个更一般的形式：

设 $A \in \boldsymbol{L}$，P 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换 (视作 n 阶方阵)，则 $P(A)$ 可测，且

$$m(P(A)) = |\det P| \cdot m(A).$$

上述命题可以使用可逆线性变换是有限多个初等变换的复合来证明.

第三章　可测函数与积分

在本章中假定 $\{X, \boldsymbol{R}, \mu\}$ 是测度空间，其中 $\boldsymbol{R}$ 是 σ–代数. 可测（可积）函数均指广义实可测（可积）函数.

3.1　可测函数及其基本性质

定义 32 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f 是 E 上的实值函数，如果对任意的 $t \in \mathbb{R}$，都有 $E(f \geq t) = \{x \in E : f(x) \geq t\} \in \boldsymbol{R}$，则称 f 是 E 上的关于 $(X, \boldsymbol{R})$ 的**可测函数**. 若将本定义中的 $\mathbb{R}$ 改为 $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$，则称 f 是广义实可测函数.

性质 33(可测函数) 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f, g, f_n, g_n 都是 E 上的可测函数，则

1. 设 $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$[1]，则 $\{x \in R | f(x) \in B\} \in \boldsymbol{R}$.
2. $\alpha f + \beta g, fg, \frac{f}{g}(g \neq 0), |f|$ 都是可测函数.
3. $\inf f_n, \sup f_n, \liminf f_n, \limsup f_n$ 都是可测函数.

定义 34 设 A 是全集 X 的子集，如果 $x \in A$，则 $\chi_A(x) = 1$，否则 $\chi_A(x) = 0$，称这样的函数 χ_A 为**特征函数**，有限多个特征函数的线性组合称为**简单函数**，形如 $\sum_1^n \alpha_k \chi_{A_k}(x)$.

[1] $\mathbb{R}$ 中所有开集张成的 σ–代数称为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 代数或 Borel 域，记作 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，其中的元素称作 Borel 集.

3.2 可测函数列的收敛性与 Lebesgue 可测函数的结构

定理 35 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f 是 E 上的非负可测函数，则存在简单函数列 $\{f_n\}$ 使得 $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f$ 且 f_n 逐点收敛于 f.

注. 如果 f 有界，则收敛可以是一致的.

定理 36(Tietze 延拓定理) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集，f 是 K 上的连续函数，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\tilde{f}$ 使得 $\tilde{f}|_K = f$.

定理 37(鲁津定理) 设 E 是 R^n 上的 Lebesgue 可测集，f 是 E 上几乎处处有限的 Lebesgue 可测函数，则任取 $\delta > 0$，存在闭集 F 使得 $m(F) < \delta$，$F \subset E$ 且 $f|_F$ 连续.

定义 38 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f_n, f 是 E 上的可测函数，若存在 $N \subset E$，$\mu(E) = 0$ 使得 $f_n(x)$ 在 $E - N$ 上逐点收敛于 $f(x)$，则称 f_n **几乎处处收敛于** f **(almost every，简写为 a.e.)**

定义 39 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f_n, f 是 E 上的可测函数，若对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E(|f_n - f| \ge \varepsilon)) = 0,$$

则称 f_n **依测度** μ **收敛于** f.

定义 40 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f_n 为 E 上可测函数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$，$\delta > 0$，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得

$$\mu(E(|f_k - f_j| \ge \varepsilon)) < \delta, \forall k, j > K,$$

则称 $\{f_n\}$ 是 E 上关于 μ 的**依测度基本列**或**依测度 Cauchy 列**.

定义 41 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f, f_n 是 E 上可测函数. 若对任意的 $\delta > 0$，存在 E 的可测子集 E_δ 使得 $\mu(E - E_\delta) < \delta$，且在 E_δ 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，则称 $\{f_n\}$ 在 E 上**近一致收敛于** f.

定理 42(各种收敛定理) 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f_n, f 是 E 上可测函数，则

1. 近一致收敛 $\Longrightarrow$ 几乎处处收敛且依测度收敛.
2. 依测度收敛 $\Longleftrightarrow$ 依测度 Cauchy.
3. 依测度 Cauchy $\Longrightarrow$ 存在子列近一致收敛.

4. Riesz：依测度收敛 $\Longrightarrow$ 存在子列几乎处处收敛（上一条的推论）.
5. Eropoв：若 $\mu(E)<\infty$，几乎处处收敛 $\Longrightarrow$ 近一致收敛.
6. Lebesgue：若 $\mu(E)<\infty$，几乎处处收敛 $\Longrightarrow$ 依测度收敛（上一条的推论）.
7. 若 $\mu(E)<\infty$，依测度收敛 $\Longleftrightarrow$ 任意子列都存在子列几乎处处收敛.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{近一致收敛}} & \Rightarrow & \boxed{\text{几乎处处收敛}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\text{依测度收敛}} & \Rightarrow & \boxed{\text{存在子列几乎处处收敛}}
\end{array}
$$

若 $\mu(E)<\infty$，

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{近一致收敛}} & \Leftrightarrow & \boxed{\text{几乎处处收敛}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\text{依测度收敛}} & \Leftrightarrow & \boxed{\text{任意子列都存在子列几乎处处收敛}}
\end{array}
$$

3.3 积分及其性质

定义 43 设 $E\in\boldsymbol{R}$，$f=\sum_1^p c_i\chi_{A_i}$ 是 X 上的非负简单函数，其中 $c_1,\cdots,c_p\geq 0, A_1,\cdots,A_p\in\boldsymbol{R}$ 两两不交. 称

$$\int_E f\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{p}\mu(E\cap A_i)$$

为 f 在 E 上的**积分**.

若 f 是 E 上的非负广义实可测函数（可取 ∞ 值）. 称

$$\int_E f\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_E h\mathrm{d}\mu \,\middle|\, h\text{ 是非负简单函数且 } h(x)\leq f(x),\forall x\in E\right\}$$

为 f 在 E 上的**积分**. 若 $\int_E f\mathrm{d}\mu<\infty$，则称 f 是 E 上的**可积函数**.

引理 44 设 $E\in\boldsymbol{R}$，f 是 E 上的非负广义实可测函数，则存在 X 上的非负简单函数列 $\{h_k\}$ 使得对任意的 $x\in E$，都有 $h_1(x)\leq h_2(x)\leq\cdots$ 且 $\lim_k h_k(x)=f(x)$.

定义 45 设 $E\in\boldsymbol{R}$，f 是 E 上广义实可测函数. 记 $f^+=\max(f,0), f^-=\max(-f,0)$，并分别称为 f 的正部和负部. 如果 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_E f^-\mathrm{d}\mu$ 中至少有一个是有限值，则称

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu$$

为 f 在 E 上的积分. 如果 f^+ 和 f^- 在 E 上都可积，则称 f 是 E 上的可积函数.

性质 46(积分) 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f,g 是 E 上的广义实可测函数，则

1. 若 f 有界且 $\mu(E) < \infty$，则 f 在 E 上可积.
2. 若 f 在 E 上可积，则 f 几乎处处有限.
3. 若 f,g 都在 E 上可积，则对任意的 $\alpha,\beta \in \boldsymbol{R}$，$\alpha f+\beta g$ 也可积，并且 $\int_E(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu + \beta\int_E g\mathrm{d}\mu$，若 f,g 都非负（未必可积），则等式依然成立.
4. 若 $f \equiv c$ 则 $\int_E f\mathrm{d}\mu = c\cdot\mu(E)$.
5. 若 $|f| \leq |g|$ a.e. 且 g 可积，则 f 也可积.
6. 若 $f \geq 0$ a.e.，则 $\int_E f\mathrm{d}\mu \geq 0$.
7. 若 f,g 均可积或均非负，且 $f \leq g$ a.e.，则 $\int_E f\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\mathrm{d}\mu$.
8. 若 f 可积且几乎处处等于 g，则 $\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu$.
9. 若 $f = 0$ a.e.，则 $\int_E f\mathrm{d}\mu = 0$.
10. 若 $f \geq 0$ a.e. 且 $\int_E f\mathrm{d}\mu = 0$，则 $f = 0 a.e.$.
11. $\mu(E) = 0 \implies \int_E f\mathrm{d}\mu = 0$.
12. $f > 0$ a.e. 且 $\mu(E) > 0 \implies \int_E f\mathrm{d}\mu > 0$.
13. 若 f,g 均可积或均非负，则 $\int_E f\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\mathrm{d}\mu$.

定理 47(绝对连续性) 设 $E \in \boldsymbol{R}$，f 是 E 上广义实可积函数. 则 $\forall\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $e \subset E$ 满足 $\mu(e) < \delta$，都有

$$\left|\int_e f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_e |f|\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

3.4 积分的极限定理

定理 48(单调收敛定理) 设 $E \in \boldsymbol{R}$, $\{f_k\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 满足 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ a.e. in E，则

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu.$$

定理 49(Fatou 引理) 设 $E \in \boldsymbol{R}$，$\{f_n\}$ 是 E 上非负广义实可测函数列，则

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu.$$

定理 50(Lebesgue 控制收敛定理) 设 $E \in \boldsymbol{R}$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列，f 是 E 上可测函数，g 是 E 上可积函数. 若

1. $\{f_n\}$ 在 E 上依测度或几乎处处收敛于 f，且
2. $\forall k \in \mathbb{N}$，$|f_k| \leq |g|$ a.e. in E，

则 f 在 E 上可积，且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

注. 这三个定理与教材或老师的 PPT 上可能有一定出入，但本质是等价的，我给出了我认为比较好用的形式，它们的其他形式（比如级数形式）都是显而易见的，不在此一一给出.

定理 51(含参变量积分连续性) 设 X, Y 是 $\mathbb{R}$ 中的区间，$f(x,y)$ 是 $X \times Y$ 上的有限实函数，g 是 X 上的 $\boldsymbol{L}$–可积函数. 如果

1. $\forall y \in Y$，$\varphi_y(x) := f(x,y)$ 在 X 上 $\boldsymbol{L}$–可测；
2. $\forall y \in Y$，$\lim_{t\to y} \varphi_t(x) = \varphi_y(x)$ a.e. $x \in X$；
3. $\forall y \in Y$，$|\varphi_y(x)| \leq g(x)$ a.e. $x \in X$；

则 $I(y) := \int_X \varphi_y \mathrm{d}m$ 是 Y 上的连续函数.

3.5 重积分和累次积分

定义 52 设 $(X, \boldsymbol{S}), (Y, \boldsymbol{T})$ 是两个可测空间，记 $\boldsymbol{P} = \{A \times B \mid A \in \boldsymbol{S}, B \in \boldsymbol{T}\}$，而用 $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}$ 表示包含 P 的最小 σ–环，称 $(X \times Y, \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})$ 为 $(X, \boldsymbol{S}), (Y, \boldsymbol{T})$ 的**乘积 (可测) 空间**，称 P 中的集为**可测矩形**.

设 $E \subset X \times Y$，称 $E_x = \{y \mid (x,y) \in E\}$ 为 x–**截口**，$E^y = \{x \mid (x,y) \in E\}$ 为 y–**截口**，有时也记作 $S_x E$ 和 $S^y E$. 称定义在 E_x（E^y）上的函数 $f_x(y) = f(x,y)$（$f^y(x) = f(x,y)$）为 f 被 x（y）决定的**截口**.

定理 53(Fubini) 设 E 是 $(X \times Y, \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}, \mu \times \nu)$ 上的 σ–有限的可测矩形 $E = A \times B$，f 是 E 上的有限函数.

1. 当 f 在 E 上关于 $\mu \times \nu$ 可积时，下面积分存在且相等

$$\int_E f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_A \left(\int_B f \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_B \left(\int_A f \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu.$$

2. 反之，如果 f 是 E 上关于 $(X \times Y, \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})$ 可测且 $|f|$ 的两个二次积分 $\int_A \left(\int_B |f| \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu$ 和 $\int_B \left(\int_A |f| \mathrm{d}\mu\right) \mathrm{d}\nu$ 有一个存在，那么 1 中等式成立（当然也有积分存在）.

注. 将 Fubini 定理条件中的可积（积分存在）改为函数 f 非负，1 中等式也成立，这个定理称为 Tonelli 定理. 此外，将定理中的乘积测度空间改为它的完全测度空间 $(X \times Y, (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})^*, \mu \times \nu)$，Fubini 定理仍成立.

3.6　单调函数与有界变差函数

定义 54 设 $E \subset \mathbb{R}$，$f: E \to \mathbb{R}$，$x_0 \in E$，则

1. 若 $f(x_0+0)$ 存在，称 $f(x_0+0) - f(x_0)$ 为 x_0 的**右方跳跃度**；
2. 若 $f(x_0-0)$ 存在，称 $f(x_0) - f(x_0-0)$ 为 x_0 的**左方跳跃度**；
3. 若 $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 均存在但 $f(x_0+0), f(x_0-0), f(x_0)$ 不全相等，就称 x_0 是 f 的**第一类不连续点**或**可去间断点**；
4. 若 x_0 不是第一类连续点，就称为**第二类连续点**.

性质 55(单调函数) 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数，那么

1. f 的不连续点都是第一类的.
2. f 的不连续点全体最多是可列集.
3. f 的左右跳跃度非负，且所有跳跃度之和不超过 $f(b) - f(a)$.
4. f 关于 Lesbesgue 测度 m 几乎处处可导.

定义 56 设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，在 $[a,b]$ 上任取一组分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，作和式

$$V_f(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

称它为 f 对分点组 $x_0, \cdots, x_0$ 的**变差**. 如果

$$\sup_{x_0, \cdots, x_n} V_f(x_0, \cdots, x_n) < \infty,$$

就称 f 是 $[a,b]$ 上的**有界变差函数**，并记

$$\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(f) = \sup_{x_0, \cdots, x_n} V_f(x_0, \cdots, x_n)$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的**全变差**. 任取 $x\in[a,b]$，称 $\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(f)$ 为 f 的**全变差函数**.

区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数全体所构成的函数类记为 $V[a,b]$.

性质 57(有界变差函数)

1. 若 $f\in V[a,b]$，则 f 有界.
2. 若 $f,g\in V[a,b],\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则 $\alpha f+\beta g\in V[a,b]$，并且
$$\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(\alpha f+\beta g)\le|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(f)+|\beta|\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(g).$$
3. $f,g\in V[a,b]\implies fg\in V[a,b]$.
4. 若 $g_n\in V[a,b]$，$\left\{\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(g_n)\right\}$ 有界，且 g_n 逐点收敛于 g，那么 $g\in V[a,b]$，并且
$$\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(g)\le\sup_n\overset{b}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(g_n).$$
5. Jordan 分解：若 $f\in V[a,b]$，则存在 $[a,b]$ 上的两个单调递增函数 φ,ψ 使得 $f=\varphi-\psi$（因此有界变差函数也几乎处处可导）.
6. 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，那么 f 与 $\overset{x}{\underset{a}{\boldsymbol{V}}}(f)$ 有相同的左（右）连续点.
7. Helly 选取原理：设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 上一族有界变差函数，又设它们本身和它们的全变差都一致有界，那么一定可以从 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中抽出指标互不相同的序列，这个序列在 $[a,b]$ 上处处收敛于一个有界变差函数.

定理 58 记
$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad \theta_1(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$
设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^p,\{\mu_n\}_{n=1}^p$ 是两个给定数组 ($p\in\mathbb{N}$ 或 $p=\infty$)，并且 $\sum_1^p(|\lambda_n|+|\mu_n|)<\infty$. 又设 $\{x_n\}_1^p$ 是在 $[a,b]$ 中给定 p 个点，称由函数项级数所表示的函数
$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^p\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^p\mu_n\theta_1(x-x_n)$$
为**跳跃函数.**

注. 显然 φ 的不连续点为 $\{x_n\}_{n=1}^p$ 且都是第一类不连续点，φ 在 x_n 的右方跳跃度是 λ_n，左方跳跃度是 μ_n.

定理 59 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数，$\{x_n\}$ 为 f 的不连续点全体，作

$$\varphi(x)=\sum_n\big(f(x_n+0)-f(x_0)\big)\theta(x-x_n)+\sum_n\big(f(x_n)-f(x_n-0)\big)\theta_1(x-x_n),$$

那么 φ 是单调递增函数，并且 $g(x)=f(x)-\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数.

定理 60 设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果 f 几乎处处可导，导函数几乎处处为 0，且 f 在 $[a,b]$ 上不是常值函数，那么称 f 为 $[a,b]$ 上的**奇异函数**.

3.7 不定积分与全连续函数

定义 61 设 f 是 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积函数，$x_0\in(a,b)$，对任何 $h_1,h_2\geq 0,h=h_1+h_2\neq 0$，如果

$$\lim_{h_1+h_2\to 0}\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0,$$

称 x_0 是 f 的 **Lebesgue 点**.

定理 62 设 f 是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可积函数，那么 $[a,b]$ 上几乎所有点都是 Lebesgue 点，并且对于 f 的 Lebesgue 点 x_0，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\bigg|_{x=x_0}=f(x_0).$$

定义 63 设 F 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\{(a_\nu,b_\nu)\}$ 是 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间，其总长度 $\sum_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，不等式

$$\sum_\nu|F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon$$

成立. 那么称 F 是在 $[a,b]$ 上的**全连续函数**或**绝对连续函数**.

性质 64(全连续函数)

1. 全连续函数必是连续的.
2. 全连续函数的线性组合和乘积仍然是全连续函数.
3. 全连续函数必是有界变差函数（从而有几乎处处可导）.

4. F 是 $[a,b]$ 上的全连续函数当且仅当任取 $x \in [a,b]$，Newton–Leibniz 公式

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t$$

成立.

定理 65(Lebesgue 分解定理) 设 g 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，那么必可以分解成

$$g = g_s + g_c + \varphi,$$

其中 φ 是 $[a,b]$ 上的跳跃函数，g_c 是 $[a,b]$ 上的全连续函数，g_s 是奇异的有界变差函数. 除去相差一个常数外，三个函数 g_s, g_c, φ 由 g 唯一确定.

参考文献

[1] 夏道行，实变函数与泛函分析 上册，高等教育出版社，北京，2010.

[2] Walter Rudin，*Real and complex analysis*，McGraw-Hill Book Company，Singapore，1987.

[3] Gerald B. Folland，*Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*，A Wiley-lnterscience Publication，New York，1999.

西安交通大學

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY