西安交通大学数学与统计学院

牛逼

课堂笔记与作业
数学基础课系列

泛函分析课堂笔记

Notes on Functional Analysis

2022-2023学年第一学期

强基数学001 吉越坤

What is clear and easy to grasp attracts us; complications deter.

David Hilbert

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

目录

第一章 度量空间与赋范空间

1.1 度量空间, 完备与纲定理

定义 1.1.1: 度量空间

设 X 是一个非空集合. X 叫做**度量空间**, 是指在 X 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$ 满足下列三个条件:

(1) 正定性: $\rho(x,y)\geq 0$, 并且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) 对称性: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) 三角不等式: $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)\quad(\forall x,y,z\in X)$.

这里 ρ 叫做 X 上的一个**距离**, 以 ρ 为度量的度量空间 X 记作 (X,ρ).

例 1.1.2: Euclidean 空间

Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的距离 (欧氏距离) 一般定义为

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2},\quad \forall x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n).$$

还可以定义其他距离, 例如

$$\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|,\quad \rho_2(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}\left|x_i-y_i\right|.$$

例 1.1.3: 连续函数空间

$[a,b]$ 上的连续函数空间 $C([a,b])$ 上的距离一般定义为

$$\rho(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|.$$

其他常见距离还有

$$\rho'(f,g) = \int_a^b \left|f(t)-g(t)\right| \mathrm{d}t.$$

例 1.1.4: $\mathbb{R}$ 上的距离

除了最常见的 $\rho(x,y) = \left|x-y\right|$ 之外, 还有

$$\rho'(x,y) = \frac{\left|x-y\right|}{1+\left|x-y\right|}$$

也构成一个 $\mathbb{R}$ 上的度量.

例 1.1.5: 几乎处处有界函数空间 $S[a,b]$

$S[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上几乎处处有界的可测函数全体. 其上的距离定义为

$$\rho(f,g) = \int_a^b \frac{\left|f-g\right|}{1+\left|f-g\right|} \mathrm{d}\mu.$$

例 1.1.6: 实数列空间

S 表示一切实数列 $x = \{x_n\}_1^\infty$ 全体. 其上的距离为

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\left|x_n-y_n\right|}{1+\left|x_n-y_n\right|}.$$

例 1.1.7: L^p 空间

设 $1 \le p < \infty$, $L^p[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上所有 p 次可积函数全体, 其上距离定义为

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

☞ **注**

L^p 中的函数几乎处处相等的函数视作等同. 此外, 当 $p=\infty$ 时也有相应的 L^∞ 空间, 详细的定义见附录A.3.

例 1.1.8: 离散距离

在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

定义 1.1.9: 收敛和极限

度量空间 (X,ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做**收敛**到 x_0 是指: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$. 这时记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或者 $x_n\to x_0$, x_0 称为 $\{x_n\}$ 的**极限**.

☞ **注**

极限如果存在必唯一.

若对 X 上的两个度量 ρ_1 和 ρ_2, 满足 $\forall x_n,x\in X$, 有 $\rho(x_n,x)\to 0 \iff \rho(x_n,x)\to 0$, 则称 ρ_1 和 ρ_2 等价.

定义 1.1.10: 闭集

度量空间 (X,ρ) 中的一个子集 E 称为**闭集**是指:$\forall\{x_n\}\subset E$, 若 $x_n\to x_0$, 则 $x_0\in E$.

☞ **注**

度量空间中的其他基础拓扑概念见附录A.1.

定义 1.1.11: Cauchy 列

度量空间 (X,ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做**Cauchy 列**(或基本列) 是指: $\rho(x_n,x_m)\to 0(n,m\to\infty)$.

☞ **注**

此即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $m,n>N$ 时都有 $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$.

性质 1.1.12: Cauchy 列的性质

(1) 收敛列一定是 Cauchy 列.

(2) 若 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列且存在子列 $x_{n_k} \to x$, 则 $x_n \to x$.

(3) 若 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 则 $\{x_n\}$ 有界 (存在 $M > 0$ 和 $x_0 \in X$ 使得 $\rho(x_n, x_0) \le M (\forall n \ge 1)$.)

定义 1.1.13: 完备空间

如果空间中所有 Cauchy 列都收敛, 则称该空间是**完备的**.

☞ **注**

不是所有空间都完备, 例如 $\mathbb{Q}$(Euclidean 距离) 上趋于某个无理数的有理序列均是 Cauchy 列, 但在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛.

定理 1.1.14: 完备度量空间的等价条件

设 (X, ρ) 是度量空间. 则 X 完备 $\iff$ 若 $\{A_n\}$ 是 X 中的单调下降非空闭子集列且满足

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0,$$

则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是单点集.

☞ **注**

单调下降即 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$.

$\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y)$, **不难证明** $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

证明. 必要性: 首先证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空. 取 $x_n \in A_n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, 则

$$\rho(x_n, x_n) \le \operatorname{diam} A_n \to 0, \quad m > n \to \infty.$$

则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 由于 X 完备, 有 $x_n \to x \in X$. 又因为 A_n 闭, 故 $x \in A_n (\forall n) \implies x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

下证 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 中只有一个元素. 设 $x_1, x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则

$$\rho(x_1, x_2) \le \operatorname{diam} A_n \to 0,$$

故 $\rho(x_1, x_2) = 0 \implies x_1 = x_2$.

充分性: 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 令 $A_k = \overline{\{x_n\}_{n=k}^{\infty}}$, 则 $\{A_n\}$ 是闭子集列, 单调下降并且直径趋于 0. 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$. 因为

$$\rho(x_n, x) \le \operatorname{diam} A_n \to 0,$$

因此 $x_n \to x$. 故 X 完备. □

定义 1.1.15: 稠密集

设 (X, ρ) 是度量空间, $E \subset X$. 若 $\forall x \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $z \in E$ 使得 $\rho(x, z) < \varepsilon$, 则称 E 是 X 中的**稠密集**.

☞ **注**

此即 $\forall x \in X$, **存在** $\{x_n\} \subset E$ **使得** $x_n \to x$, **也即** $\overline{E} = X$.

定义 1.1.16: 疏集

设 (X, ρ) 是度量空间, $E \subset X$. 若 $\overline{E}$ 没有内点 ($\overline{E}^{\circ} = \varnothing$), 则称 E 是 X 中的**疏集**.

命题 1.1.17: 疏集等价定义

以下三点等价:

(1) E 是疏集.

(2) E 不在 X 中的任何一个非空开集中稠密.

(3) $\forall \overline{B}(x, r) = \{z \in X : \rho(z, x) \le r\}$ 必存在开球 $B(x', r') \subset B(x, r)$ 使得 $\overline{B}(x', r') \cap \overline{E} = \varnothing$.

定义 1.1.18: 第一纲集与第二纲集

设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$. 若

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad \text{其中 } E_n \text{ 是疏集},$$

则 A 是 X 中的**第一纲集**. 不是第一纲集的集合称为**第二纲集**.

定理 1.1.19: Baire 纲定理

完备的度量空间是第二纲集.

证明. 设 X 是完备度量空间, 反设 X 是第一纲集, 则存在疏集列 $\{E_n\}$ 使得

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

任取开球 $B(x_0,r_0)\subset X$, 由于 E_1 是疏集, 存在 $B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0)$ 满足 $0<r_1<1$ 使得

$$\overline{B}(x_1,r_1)\cap\overline{E_1}=\varnothing.$$

由于 E_2 是疏集, 对于 $B(x_1,r_1)$, 存在 $B(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)$ 满足 $0<r_2<\frac{1}{2}$ 使得

$$\overline{B}(x_2,r_2)\cap\overline{E_2}=\varnothing.$$

进而 $\overline{B}(x_2,r_2)\cap\bigcup\limits_{i=1}^{2}\overline{E_i}=\varnothing$. 以此类推, 存在 $B(x_n,r_n)\subset B(x_{n-1},r_{n-1})$ 满足 $0<r_n<\frac{1}{n}$ 使得

$$\overline{B}(x_n,r_n)\cap\bigcup_{i=1}^{n}\overline{E_i}=\varnothing.$$

则 $\{\overline{B}(x_n,r_n)\}$ 是单调下降且直径趋于 0 的闭集列. 由于 X 是完备的, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}(x_n,r_n)=\{x\}.$$

则 $x\in\overline{B}(x_n,r_n),n\geq 1$. 故 $x\notin E_n(n\geq 1)$, 矛盾. □

☞ **注**

使用 Baire 纲定理可以证明 [0,1] 不可数, 因为可数集是第一纲集, 但 [0,1] 是完备的

1.1.1 应用

推论 1.1.20: 处处不可导的连续函数的存在性

$C[0,1]$ 中处处不可导的函数全体 E 是非空的, 并且 E^c 是第一纲集.

证明. 由于 $C[0,1]$ 是完备的赋范空间, 由 Baire 纲定理知它是第二纲的, 因此只需证明 E^c 是第一纲集即可. 记

$$A_n = \left\{ f \in C[0,1] : \exists x \in [0,1], \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \le n, \forall 0<|h| \le \frac{1}{n} \right\},$$

则 $E^c \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 下面证明 A_n 是疏集. 首先证明 A_n 是闭集. 若 $f \notin A_n$, 则 $\forall x \in [0,1]$, 存在 h_x 使得 $\left|f(x+h_x)-f(x)\right| > n|h_x|$ 且 $0<|h_x| \le \frac{1}{n}$. 由 f 的连续性, 存在 x 的邻域 V_x 及 $\varepsilon_x > 0$ 使得

$$\left|f(y+h_x)-f(y)\right| > n|h_x| + 2\varepsilon_x, \quad \forall y \in V_x.$$

取 $V_{x_1}, \cdots, V_{x_m}$ 为 $[0,1]$ 的开覆盖, 并记 $\varepsilon = \min\limits_{1\le k\le m} \varepsilon_{x_k}$, 则当 $\|g-f\| < \varepsilon$ 时, 任取 $x \in [0,1]$, 存在 k 使得 $x \in V_{x_k}$, 从而

$$\left|g(x+h_{x_k})-g(x)\right| \ge \left|f(x+h_{x_k})-f(x)\right| - 2\varepsilon > n\left|h_{x_k}\right|,$$

因此 $g \notin A_n$, A_n 是闭集.

再证 A_n 没有内点. 为此需要证明 $\forall f \in A_n$, 存在 $g \notin A_n$ 但 $\|f-g\|$ 可以任意小. 由于多项式全体在 $C[0,1]$ 上稠密, 只需证明对任意多项式 p 以及 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C[0,1] \setminus A_n$ 且 $\|p-g\| < \varepsilon$ 即可.

由于 p 是光滑函数, 存在 $M>0$ 使得

$$\left|p(x+h)-p(x)\right| \le M|h|, \quad \forall |h| \le \frac{1}{n}.$$

取 q 为 $[0,1]$ 上的分段线性函数, 满足 $\|q\|<\varepsilon$ 且每一段的斜率的绝对值均大于 $M+n$. 此时必有 $p+q \notin A_n$, 因为如果 $p+q \in A_n$, 则

$$\begin{aligned} &\left|q(x+h)-q(x)\right| - M|h| \le \left|p(x+h)+q(x+h)-p(x)-q(x)\right| \le n|h| \\ \Longrightarrow &\left|q(x+h)-q(x)\right| \le (M+n)|h|, \qquad \forall |h| \le \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

与 q 的每段斜率绝对值大于 $M+n$ 矛盾. □

1.1.2　作业

✍ **题目1.1.1.** 设 $C[a,b]$ 上有两个距离

$$\rho_1(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)| \quad \text{和} \quad \rho_2(f,g)=\int_a^b \left|f(t)-g(t)\right| \mathrm{d}t.$$

验证它们符合距离定义的三个条件, 判断并证明它们在 $C[a,b]$ 上是否完备.

解答. 正定性: 由绝对值的非负性可得 ρ_1 和 ρ_2 都非负. 若 $\rho_1(f,g)=0$, 则

$$\left|f-g\right| \le \rho_1(f,g)=0 \Longrightarrow f=g(\forall t\in[a,b]).$$

若 $\rho_2(f,g)=0$, 则 $f=g$ a.e., 因为 f,g 都是连续函数, 此即 $f=g$.

对称性: 由于 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 都有 $\left|x-y\right|=\left|y-x\right|$, 因此 ρ_1,ρ_2 都满足对称性.

三角不等式: 由 $\left|x-y\right| \le |x-z|+\left|z-y\right| (\forall x,y,z\in\mathbb{R})$ 可得.

ρ_1 是完备的. 设 $\{f_n\}\subset C[a,b]$ 为 Cauchy 列, 则 $\forall t\in[a,b]$, $\left|f_m(t)-f_n(t)\right| \le \rho_1(f_m,f_n)\to 0(m,n\to\infty)$. 由实数完备性可知存在 $f(t)\in\mathbb{R}$ 使得 $f_n(t)\to f(t), \forall t\in[a,b]$. $\forall\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$\left|f_m(t)-f_n(t)\right|<\varepsilon, \quad \forall t\in[a,b], m,n>N.$$

在上式中令 $m\to\infty$, 则 $f_n\to f$.

ρ_2 不是完备的, 因为若取 $f_n(t)=(1-n\frac{t-a}{b-a})\chi_{[a,a+\frac{b-a}{n}]}(t)$, 则

$$\rho_2(f_n,f_m)=\frac{b-a}{2}\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|\to 0,\quad m,n\to 0.$$

因此 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列. 并且

$$\rho_2(f,f_n)=\frac{b-a}{2n}\to 0,$$

其中 $f(t)=\chi_{\{a\}}(t)\notin C[a,b]$. 因此 $(C[a,b]\oplus\mathbb{R}f,\rho_2)$ 中 $C[a,b]$ 不是闭集, 从而不完备.

✍ **题目1.1.2.** 证明 $\mathbb{R}$ 上的二元函数 $\rho_2(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ 是一个度量, 并且与 Euclidean 距离 $\rho_1(x,y)=\left|x-y\right|$ 等价.

解答. ρ_2 满足正定性和对称性, 只需验证三角不等式. 注意到

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{ab(2+a+b)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}\geq 0,\quad \forall a,b\geq 0.$$

故在上式中取 $a=|x-z|,b=\left|z-y\right|$ 可得 $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, 有

$$\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)\geq\frac{|x-z|+\left|z-y\right|}{1+|x-z|+\left|z-y\right|}\geq\frac{\left|x-y\right|}{1+\left|x-y\right|}=\rho_2(x,y).$$

此外, 根据

$$\begin{aligned}x_n\xrightarrow{\rho_1}x\iff|x_n-x|\to 0\iff\frac{1}{1+|x-x_n|}\to 1\\\iff\frac{|x-x_n|}{1+|x-x_n|}\to 0\iff x_n\xrightarrow{\rho_2}x,\end{aligned}$$

故 ρ_1 和 ρ_2 等价.

✍ **题目1.1.3.** $S[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上几乎处处有界的可测函数全体. 其上的距离定义为

$$\rho(f,g)=\int_a^b\frac{\left|f-g\right|}{1+\left|f-g\right|}\mathrm{d}\mu.$$

验证 ρ 是一个距离, 并证明关于 ρ 收敛就是依测度收敛, 据此得到 $(S[a,b],\rho)$ 完备.

解答. 使用与上题同样的不等式可以验证 ρ 满足三角不等式.

下面验证依距离收敛当且仅当依测度收敛. 若 f_n 依测度收敛到 f, 则 $\forall \varepsilon \in (0,b-a)$, 存在 N 使得当 $n>N$ 时都有

$$\lim_{n\to\infty} m(\left|f-f_n\right|>\delta)<\delta, \quad \text{其中 } \delta=\frac{\varepsilon}{b-a-\varepsilon}.$$

故

$$\rho(f,f_n)\le\int_a^b\frac{\delta}{1+\delta}=\varepsilon, \quad \forall n>N,$$

从而 f_n 依距离收敛到 f.

反之, 若 f_n 不依测度收敛到 f, 则存在子列, 不妨设还是 $\{f_n\}$ 使得

$$m(\left|f-f_n\right|>r)\ge r, \quad \forall n\ge 1.$$

故

$$\rho(f,f_n)\ge m(\left|f-f_n\right|>r)\frac{r}{1+r}\ge\frac{r^2}{1+r}>0,$$

从而 f_n 也不依距离收敛到 f.

因此, 由于依测度 Cauchy 必然依测度收敛, 故 ρ 也是完备的.

✍ **题目1.1.4.** 设 $1\le p<\infty$ 证明 $L^p[a,b]$ 空间上的度量 ρ 满足度量定义的三个性质, 并证明 L^p 空间完备.

解答. 要证明 $L^p[a,b]$ 上的距离 ρ 是距离, 只需证明 Minkowski 不等式:

$$\left\|f+g\right\|_p\le\left\|f\right\|_p+\left\|g\right\|_p, \quad \forall f,g\in L^p[a,b],$$

上式的证明见附录A.3的定理A.3.5.

下面证明 $L^p[a,b]$ 完备. 由于 $L^p[a,b]$ 关于范数 $\|\cdot\|_p$ 构成赋范空间, 可以使用如下引理:

设 X 是赋范空间, 并且由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty(\{x_n\}\subset X)$ 可得出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\in X$. 则 X

完备.

证明: 设 $\{x_n\}$ 是一个基本列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\frac{1}{2^k},\quad \forall k.$$

由

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1<\infty$$

可知, 存在 $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$, 也即 $x=y+x_{n_1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$, 因此 $\{x_{n_k}\}$ 收敛, 根据基本列的性质, $\{x_n\}$ 也收敛.

下面验证 L^p 满足引理条件. 设 $\{f_n\}\subset L^p$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p<\infty$(根据积分有限, 函数必几乎处处有限可得). 则 $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|\|_p\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p<\infty\implies\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<\infty$ μ-a.e.

根据实数完备性, 存在 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ μ-a.e. 并且

$$\underbrace{\|f-\sum_{n=1}^{N}f_n\|_p=\|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n\|_p}_{\text{函数在某零测集上的取值不影响 } L^p \text{ 范数}}\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\|f_n\|_p\to 0,\quad N\to\infty.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ 依范数 $\|\cdot\|_p$ 收敛, 从而 L^p 完备.

✍ **题目1.1.5.** 设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$. 证明: A 是闭集 ($\forall x\in A^c$, 存在 $B(x,r)$ 使得 $B(x,r)\subset A^c$) 的充要条件是若 $\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\to x\in A$, 则 $x\in A$.

解答. 必要性: 若 $\{x_n\}\subset A$ 并且 $x_n\to x\notin A$. 存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)\subset A^c$, 而 $x_n\to x$, 故存在充分大的 N 使得 $x_N\in B(x,r)$, 矛盾.

充分性: 反设存在 $x\in A^c$ 但 $\forall r>0$, 存在 $x_r\in B(x,r)\in A$. 则取 $r=\frac{1}{n}$ 可得趋于 x 的 A 中点列, 从而 $x\in A$, 矛盾.

✍ **题目1.1.6.** 证明: 对度量空间 (X,ρ) 的任意子集 A, 都有 $\operatorname{diam}A=\operatorname{diam}\overline{A}$.

解答. 由于 $A\subset\overline{A}$, 有 $\operatorname{diam}A\le\operatorname{diam}\overline{A}$. 还需证明 $\operatorname{diam}\overline{A}\le\operatorname{diam}A$. 任取 $x,y\in\overline{A}$, 由于

A 在 $\overline{A}$ 中稠密, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in A$ 使得

$$\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \rho(y, y_\varepsilon) < \varepsilon.$$

从而

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_\varepsilon) + \rho(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \rho(y_\varepsilon, y) \le \operatorname{diam} A + 2\varepsilon,$$

由于上式对 $\forall x, y \in \overline{A}$, 成立, 故 $\operatorname{diam}\overline{A} \le \operatorname{diam} A + 2\varepsilon$. 最后根据 ε 的任意性可得 $\operatorname{diam}\overline{A} \le \operatorname{diam}\overline{A}$.

✍ **题目1.1.7.** 证明以下三点等价:

(1) E 是疏集, 也即 $\overline{E}^{\circ} = \varnothing$.

(2) E 不在 X 的任何一个非空开集中稠密.

(3) $\forall \overline{B}(x, r)$, 存在开球 $B(x', r') \subset B(x, r)$ 使得 $\overline{B}(x', r') \cap \overline{E} = \varnothing$.

解答. (1) $\Longrightarrow$ (2): 若存在非空开集 G 使得 $G \subset \overline{E}$, 则 $\overline{E} \ne \varnothing$, E 不是疏集.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 任取 $\overline{B}(x, r)$, 由于 E 不在 $B(x, r)$ 中稠密, 故 $B(x, r) \not\subset \overline{E}$, 从而存在 $x' \notin \overline{E}$ 但 $x' \in B(x, r)$. 而 $\overline{E}^c$ 是开集, 故存在 r' 使得 $B(x', r') \subset \overline{E}^c$, 取 r' 充分小使得 $B(x', r') \subset B(x, r)$ 即可.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 反设 $\overline{E}^{\circ} \ne \varnothing$, 则存在 $B(x, r) \subset \overline{E}$, 矛盾.

1.2 完备化

对任意度量空间, 都存在一个它的完备化空间, 并且这个完备的空间是唯一的.

例 1.2.1: 一些完备化的例子

(1) 从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 的完备化过程: 将有理数中的 Cauchy 列在某种意义下视作一个数, 就是实数.

(2) 由 Riemann 积分到 Lebesgue 积分: 从 (几乎处处) 连续函数到 L^1 可积函数.

(3) PDEs: 光滑函数到 Sobolev 空间.

定义 1.2.2: 连续函数

设 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2) 是度量空间, $T: X_1 \to X_2$. 若对任意的 $\{x_n\} \subset X_1, x \in X_1$ 满足 $\rho_1(x_n,x) \to 0$, 都有 $\rho_2(Tx_n,Tx) \to 0$, 则称 T 是从 X_1 到 X_2 的**连续函数**.

☞ 注

T 连续 $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in X_1$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\rho_1(x_0,x) < \delta$ 时都有 $\rho_1(Tx,Tx_0) < \varepsilon$.

定义 1.2.3: 等距映射

设 $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$ 是度量空间, $T: X_1 \to X_2$. 若

$$\rho_1(x,x') = \rho_2(Tx,Tx'), \quad \forall x,x' \in X_1,$$

则称 T 是从 X_1 到 X_2 的**等距映射**. 若 T 还是满射, 则 T 称为**等距同构映射**, 此时称 X_1 和 X_2**等距同构**.

定义 1.2.4: 完备化空间

设 (X,ρ) 是度量空间. 若存在完备的度量空间 X_1 使得 X 等距同构于 X_1 的一个稠密子空间, 则称 X_1 是 X 的**完备化空间**.

定理 1.2.5: 完备化定理

每个度量空间必存在一个完备化空间.

☞ 注

在等距同构意义下, 完备化空间是唯一的, 也即任意两个完备化空间都等距同构.

证明过程需要使用等价关系的概念. 等价关系就是满足自反性 $(a \sim a)$, 对称性 $(a \sim b \implies b \sim a)$ 以及传递性 $(a \sim b, b \sim c \implies a \sim c)$ 的关系.

证明. 设 (X,ρ) 是度量空间. 令 X_1 是 X 中的所有 Cauchy 列组成的集合.

定义等价关系: $\forall \{x_n\},\{y_n\} \in X_1$, 若 $\rho(x_n,y_n) \to 0$, 则称 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. 易验证 $\sim$ 是一个等价关系, 记 X_1 按 $\sim$ 分类形成 X_2, 其中元素为等价类.

在 X_2 中定义 X_2 上的二元函数

$$\rho_2([x],[y]) := \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n), \quad 其中\ x=\{x_n\}, y=\{y_n\}.$$

上述极限必存在, 因为

$$\left|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)\right| \le \rho(y_n,y_m)+\rho(x_n,x_m)$$

以及 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是 Cauchy 列, 因此 $\rho(x_n,y_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列, 从而有极限.

取 $\{x'_n\}\in[x], \{y'_n\}\in[y]$, 则由

$$\left|\rho(x_n,y_n)-\rho(x'_n,y'_n)\right| \le \rho(x_n,x'_n)+\rho(y_n,y'_n)$$

以及右端两项均趋于 0 可知, ρ_2 的取值与代表元的选取无关. 易证 ρ_2 是 X_2 的一个度量.

对于 $x\in X$, 令 $\xi_x := (x,x,\cdots)$, 则 $[\xi_x]\in X_2$. 作映射

$$T: X\to X_2, x\mapsto[\xi_x].$$

由于

$$\rho_2(Tx,Ty)=\rho_2([\xi_x],[\xi_y])=\lim_{n\to\infty}\rho(x,y)=\rho(x,y),$$

则 T 是从 X 到 X_2 的等距映射.

下面证明 (X_2,ρ_2) 是 (X,ρ) 的完备化空间. 首先证明 $R(T)=T(X)$($R(T)$ 指 T 的值域, 即 Range of T) 在 X_2 中稠密. $\forall[x]\in X_2 (x=\{x_n\})$, 由于

$$\rho_2(Tx_n,[\xi])=\lim_{j\to\infty}\rho(x_n,x_j)\to 0, \quad n\to\infty,$$

故 $Tx_n\to[\xi]$.

最后证明 (X_2,ρ_2) 完备. 设 $[x^{(n)}]$ 是 X_2 中的 Cauchy 列. 由于 $T(X)$ 在 X_2 中稠

密, $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in X$ 使得 $\rho_2(Tx_n,[x^{(n)}])<\frac{1}{n}$. 因为当 $m,n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\rho_2(Tx_n,Tx_m)\le\rho_2(Tx_n,[x^{(n)}])+\rho_2([x^{(n)}],[x^{(m)}])+\rho_2([x^{(m)}],Tx_m)\\ \le&\frac{1}{n}+\rho_2([x^{(n)}],[x^{(m)}])+\frac{1}{m}\to 0,\end{aligned}$$

故 $\rho(x_n,x_m)=\rho_2(Tx_n,Tx_m)\to 0$, 即 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 记 $x=\{x_n\}$, 则

$$\rho_2([x^{(n)}],[x])\le\rho_2([x^{(n)}],Tx_n)+\rho_2(Tx_n,[x])\le\frac{1}{n}+\lim_{j\to\infty}\rho(x_n,x_j),\quad n\to\infty,$$

故 $[x^{(n)}]\to[x]$, 从而 X_2 完备. □

例 1.2.6: 多项式空间的完备化

记 $P[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上多项式全体, 其上定义距离 $\rho(f,g)=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|f(t)-g(t)\right|$, 根据 Weierstrass 逼近定理, $P[a,b]$ 的完备化空间是 $C[a,b]$.

☞ 注

Weierstrass **逼近定理**: **设** $-\infty<a<b<\infty$, **则** $\overline{P[a,b]}=C[a,b]$. **该定理的证明见附录**A.2.

例 1.2.7: $C_0^1(0,1)$

记 $C_0^1(0,1):=\{f\in C^1(0,1):\operatorname{supp}f\subset(0,1)\}$, 其中 $\operatorname{supp}f=\overline{\{t\in(0,1):f(t)\ne 0\}}$ 为 f 的支集 (Support). 对 $x,y\in C_0^1(0,1)$, 定义

$$\rho(x,y):=\left(\int_0^1\left|x(t)-y(t)\right|^2\mathrm{d}t+\int_0^1\left|x'(t)-y'(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

则 $(C_0^1(0,1),\rho)$ 是度量空间, 但不完备.

☞ 注

$C_0^1(0,1)$ **就是连续可微且在** 0 **以及** 1 **附近为** 0 **的函数**.

1.2.1 作业

✍ **题目1.2.1.** 设 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2) 是度量空间, $T: X_1 \to X_2$. 证明: T 连续 $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in X_1$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\rho_1(x_0,x) < \delta$ 时都有 $\rho_1(Tx, Tx_0) < \varepsilon$.

解答. 若 T 连续, 反设存在 $\varepsilon > 0, \{x_n\} \subset X$, 使得 $r(x_0,x_n) < \frac{1}{n}, r(Tx_0,Tx_n) \geq \varepsilon$. 此时 $x_n \to x_0$ 但 $Tx_n \not\to Tx_0$, 矛盾.

反之, 对于 X 中的点列 $\{x_n\}$ 和点 x_0 满足 $x_n \to x_0$, 任取 $\varepsilon > 0$ 以及对应的 δ, 存在 N 使得 $n > N$ 时都有 $\rho(x_0,x_n) < \delta$, 从而 $r(Tx_0,Tx_n) < \varepsilon$, 由极限定义不难得出 $Tx \to Tx_0$.

✍ **题目1.2.2.** 证明完备化定理中的 ρ_2 是 X_2 中的一个度量.

解答. 首先验证 ρ_2 满足正定性. 设 $\rho_2([x],[y]) = 0$, 此即

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = 0,$$

也即 $x \sim y, [x] = [y]$. 根据 ρ 的非负性和对称性可知 ρ_2 也是非负且对称的.

对 $[x],[y],[z] \in X_2$, 有

$$\begin{aligned}\rho_2([x],[y]) &= \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \big(\rho(x_n,z_n) + \rho(z_n,y_n)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,z_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(z_n,y_n) = \rho_2([x],[z]) + \rho_2([z],[y]),\end{aligned}$$

因此满足三角不等式.

✍ **题目1.2.3.** 证明在等距同构意义下, 完备化空间是唯一的.

解答. 设 (X,ρ) 的完备化空间为 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2). 则存在从 X 分别到 X_1,X_2 的等距映射 T_1 和 T_2, 并且 $\overline{T_1(X)} = \overline{T_2(X)}$. 任取 $y_1 \in X_1$, 存在 $x_n \in X$ 使得 $T_1x_n \to y_1$. 则

$$\rho_2(T_2x_n, T_2x_m) = \rho(x_n,x_m) \to 0, \quad m,n \to \infty,$$

故 $\{T_2x_n\}$ 是 X_2 中的 Cauchy 列, 由 X_2 完备知, 存在 $y_2 \in X_2$ 使得 $T_2x_n \to y_2$. 定义从

X_1 到 X_2 的映射 T 满足 $Ty_1 = y_2$. 则

$$\rho_1(y_1, y_1') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = \lim_{n\to\infty} \rho_2(T_2 x_n, T_2 x_n') = \rho_2(y_2, y_2'),$$

其中 $x_n, x_n' \in X$ 使得 $T_i x_n \to y_i, T_i x_n' \to y_i' (i = 1, 2)$. 故 T 是 X_1, X_2 之间的等距同构.

✍ **题目1.2.4.** (本题中函数相等在几乎处处意义下讨论) 记 $C_0^1(0,1) := \{f \in C^1(0,1) : \operatorname{supp} f \subset (0,1)\}$, 其中

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{t \in (0,1) : f(t) \neq 0\}}$$

为 f 的支集 (Support). 定义

$$\rho(x,y) := \left(\int_0^1 \left|x(t) - y(t)\right|^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 \left|x'(t) - y'(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in C_0^1(0,1).$$

(1) 证明: $(C_0^1(0,1), \rho)$ 是度量空间, 但不完备.

(2) 如何刻画 $(C_0^1(0,1), \rho)$ 的完备化空间?

(3) 记 X 是 $C_0^1(0,1)$ 的完备化空间, 证明 $X \subset C[0,1]$.

解答. 定义 $C_0^1(0,1)$ 中的范数

$$\|x\|^2 = \int_0^1 |x|^2 + \left|x'\right|^2, \quad x \in C_0^1(0,1),$$

与 ρ 的定义一致, 即 $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

(1) 正定性和对称性显然满足, 在

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\int_0^1 |f|^2 + |f'|^2} + \sqrt{\int_0^1 |g|^2 + |g'|^2}\right)^2 \\
&= \int_0^1 |f|^2 + |f'|^2 + 2\sqrt{\int_0^1 |f|^2 + |f'|^2}\sqrt{\int_0^1 |g|^2 + |g'|^2} + \int_0^1 |g|^2 + |g'|^2 \\
&\geq \int_0^1 |f|^2 + |f'|^2 + \int_0^1 |g|^2 + |g'|^2
\end{aligned}$$

中取 $f = x - z, g = z - y$ 可得三角不等式.

反例: 记

$$f(x)=\int_0^x \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}(t)\mathrm{d}t,$$

以及

$$\begin{aligned}f_n(x)=\int_0^x \Big((3nt-n+1)\chi_{(\frac{1}{3}-\frac{1}{3n},\frac{1}{3})}(t)\\ +\chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}(t)+(2n+1-3nt)\chi_{(\frac{2}{3},\frac{2}{3}+\frac{1}{3n})}(t)\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

则 $f_n\in C_0^1(0,1)$, $\|f-f_n\|\to 0$ 但 $f\notin C_0^1(0,1)$.

(2) 下面证明

$$X=W_0^{1,2}[0,1]:=\{x\in L^2[0,1]:\ x\text{ 绝对连续且 }x(0)=x(1)=0\}.$$

对 $\forall x\in W_0^{1,2}[0,1]$, 定义

$$x_n(t)=x(\frac{nt-1}{n-2})\chi_{[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]}(t),\quad t\in[0,1],n\geq 3.$$

则由 Lebebesgue 控制收敛定理和 x 绝对连续, $\|x-x_n\|\to 0$, 因此 $W_0^{1,2}[0,1]\subset X$.

下面分两步证明 $X\subset W_1^{1,2}[0,1]$. 首先证明 $\forall x\in X$, x 绝对连续. 取 $\{x_n\}$ 为 $C_0^1(0,1)$ 中的 Cauchy 列, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n'\}$ 都是 $L^2[0,1]$ 中的 Cauchy 列, 在 L^2 范数下的极限分别是 x 和 u^*, 并记

$$u(t)=\int_0^t u^*(s)\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[0,1].$$

注意到 $\forall\varphi\in C_0^1(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t&=\int_0^1\int_0^t u^*(s)\mathrm{d}s\varphi'(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_0^1 u^*(s)\int_s^1\varphi'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s=-\int_0^1 u^*(s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

而由与上式同样的推导以及强收敛必弱收敛可得

$$-\int_0^1 u^*\varphi = -\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n'\varphi = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n\varphi' = \int_0^1 x\varphi' = \int_0^1 u\varphi',$$

上式对 $\forall\varphi\in C_0^1(0,1)$ 均成立, 因此 $x = u + \text{constant}$, 故 x 就是 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛的极限, 绝对连续.

最后证明 $x(0) = x(1) = 0$. 由 (3) 中的结论: $\|x\|_\infty \leq \sqrt{2}\|x\|(\forall x\in X)$, 故 x 还是 $C_0^1(0,1)$ 中的一致收敛的极限, 因此由每个 x_n 在 $0,1$ 处的函数值均为 0 可得 x 的这些值也为 0.

(3) 任取 $x\in C_0^1(0,1)$, 由积分中值定理, 存在 $t_0\in(0,1)$ 使得

$$x(t_0) = \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t,$$

从而 $\forall t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}|x(t)| &= \left|x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^1 |x| + \left|x'\right| \\ &\leq \left(\int_0^1 |x|^2 + \left|x'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 1^2 + 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\|x\|.\end{aligned}$$

故 $\|x\|_\infty \leq \sqrt{2}\|x\|(\forall x\in X)$, 而 $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ 完备, 因此 $X\subset C[0,1]$.

1.3 列紧集

1.3.1 列紧集, 完全有界集和可分空间

在 $\mathbb{R}^n$ 中有界列必有收敛子列, 但这一点其他度量空间中未必成立, 下面是一些例子.

例 1.3.1: l^2 中没有收敛子列的有界列

$l^2 := \{\{x_n\} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$. 其上定义距离

$$\rho(x,y) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n - y_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\}.$$

则 l^2 中的有界列未必有收敛子列.

证明. 记

$$e^{(n)} := (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots), \quad n \geq 1,$$

则 $e^{(n)} \in l^2$. 并记 $e := (0,0,\cdots) \in l^2$ 则 $e^{(n)} \in B(e,2)$, 故 $\{e^{(n)}\}$ 是 l^2 中的有界列, 并且

$$\rho(e^{(m)},e^{(n)}) = \sqrt{2} > 0, \quad \forall m \neq n,$$

故 $\{e^{(n)}\}$ 有界但是没有收敛子列. □

例 1.3.2: $L^2[0,2\pi]$ 中没有收敛子列的有界列

$\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 满足 $\rho(e^{in\theta},e^{im\theta}) = \sqrt{4\pi}$ 并且 $\rho(e^{in\theta},0) = \sqrt{2\pi}(\forall m \neq n)$.

例 1.3.3: $C[0,1]$ 中没有收敛子列的有界列

在 $C[0,1]$ 定义距离

$$\rho(f,g) := \max_{t\in[0,1]} \left|f(t) - g(t)\right|,$$

则函数列

$$f_n(t) = (1-nt)\chi_{[0,\frac{1}{n})}(t), \quad n \geq 1, t \in [0,1]$$

有界但是没有收敛子列.

定义 1.3.4: 列紧集, 自列紧集与列紧空间

设 (X,ρ) 为度量空间, $A \subset X$. 若 A 中任意点列在 X 中均有收敛子列, 则称 A 是 X 中的**列紧集**. 若收敛的极限点仍在 A 中, 则称 A 是**自列紧集**. 若 X 是列紧的, 则称 X 是**列紧空间**.

性质 1.3.5: 列紧集的性质

设 (X,ρ) 是度量空间.

(1) 有限点集是列紧集.

(2) 列紧集的子集是列紧集.

(3) 列紧空间必完备.

(4) $\mathbb{R}^n$ 中, 有界集与列紧集等价, 有界闭集与自列紧集等价.

定义 1.3.6: ε-网与有穷 ε-网

设 (X,ρ) 为度量空间, $M\subset X$, $\varepsilon>0$, $N\subset M$. 若 $\forall x\in M$, 存在 $y\in N$ 使得 $\rho(x,y)<\varepsilon$, 则称 N 是 M 的**ε-网**, 若 N 还是有穷集, 则称 N 是 M 的**有穷 ε-网**.

☞ **注**

N 是 M 的 ε-网相当于 $\bigcup\limits_{y\in N} B(y,\varepsilon)\supset M$.

定义 1.3.7: 完全有界集

设 (X,ρ) 是度量空间, $M\subset X$. 若 $\forall\varepsilon>0$, 总存在 M 的一个有穷 ε-网, 则称 M 是**完全有界集**.

☞ **注**

不难看出完全有界集一定有界, 完全有界集的子列依然完全有界.

定理 1.3.8: 完全有界的充要条件

设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$. 则 A 是完全有界集当且仅当 A 中任何点列 $\{x_n\}$ 必有一个 Cauchy 子列.

证明. 必要性: 设 $\{x_n\}\subset A$, 不妨设其中元素两两互异. 由于 A 完全有界, 则对于有穷 1-网, 必存在 $y_1\in A$ 使得 $B(y_1,1)$ 中含有 $\{x_n\}$ 中无穷多个元素 $\{x_n^{(1)}\}$, 对 $\frac{1}{k}-$ 网, 存在 $y_k\in A$ 使得 $B(y_k,\frac{1}{k})$ 中含有 $\{x_n^{(k-1)}\}$ 中的无穷多个元素 $\{x_n^{(k)}\}, k\geq 2$. 则 $\{x_n^{(n)}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 满足

$$\rho(x_n^{(n)},x_{n+p}^{(n+p)})\leq\rho(x_n^{(n)},x_n^{(n+p)})+\rho(x_n^{(n+p)},x_{n+p}^{(n+p)})\leq\frac{2}{n}+\frac{2}{n+p},\quad\forall n,p\geq 1,$$

最后一个不等式成立是因为 $x_n^{(n)}$ 和 $x_n^{(n+p)}$ 都在 $B(y_n, \frac{1}{n})$ 中, $x_n^{(n+p)}$ 和 $x_{n+p}^{(n+p)}$ 都在 $B(y_{n+p}, \frac{1}{n+p})$ 中, 因此 $\{x_n^{(n)}\}$ 是 Cauchy 列.

充分性: 反证法. 假设 A 不是 X 中的完全有界集, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 A 没有有穷 ε_0- 网. 任取 $x_1 \in A$, 则存在 $x_2 \in A \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$, 存在

$$x_k \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B(x_j, \varepsilon_0), \quad \forall k \geq 2,$$

由此得到点列 $\{x_k\}$ 使得其中任意两点距离均不小于 ε_0, 因此没有 Cauchy 子列, 矛盾.

□

推论 1.3.9

在一般的度量空间中, 列紧集一定完全有界. 在完备度量空间中, 列紧集等价于完全有界集.

证明. 由定理1.3.8易得. □

定理 1.3.10

设 (X, ρ) 是度量空间, 若 X 中的每个完全有界集都是列紧的, 则 X 必完备.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 则由定理1.3.8可知 $\{x_n\}$ 完全有界, 因此列紧, 从而 $\{x_n\}$ 有收敛子列. 而 Cauchy 列若子列收敛, 本身也收敛, 故 $\{x_n\}$ 收敛, X 完备. □

定义 1.3.11: 可分空间

设 (X, ρ) 是度量空间, 若 X 中存在可数稠密子集, 则称 X 是**可分的**.

☞ **注**

也即存在点列 $\{x_n\}$ **使得** $\overline{\{x_n\}} = X$.

定理 1.3.12

设 (X, ρ) 是完全有界的度量空间, 则 X 是可分的.

证明. 令 N_n 为 X 的有穷 $\frac{1}{n}-$ 网, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

是 X 的可数稠密子集. □

例 1.3.13

$\mathbb{R}^n$ 是可分的, 因为 $\mathbb{R}^n$ 中所有有理点 $(p_1,\cdots,p_n), p_1,\cdots,p_n \in \mathbb{Q}$ 构成一个可数稠密子集.

例 1.3.14

$C[a,b]$ 是可分的, 因为由 Weierstrass 逼近定理, 多项式在 $C[a,b]$ 中稠密, 而有理多项式在多项式中稠密, 因此也在 $C[a,b]$ 中稠密.

例 1.3.15

$L^p[a,b](1 \le p < \infty)$ 是可分的, 因为阶梯型函数在 $L^p[a,b]$ 中稠密, 分点为有理数的阶梯型函数是可数的, 因此是可数稠密子集. 分点为有理点的阶梯型函数形式如下

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(q_{k-1},q_k)},$$

其中 $q_0 \le q_1 \le \cdots \le q_n$ 且均为有理数.

当 $p = \infty$ 时, $L^\infty[a,b]$ 不可分.

例 1.3.16

$l^p(1 \le p < \infty)$ 可分, 但 l^∞ 不可分. 其中

$$l^\infty := \{\{x_n\} : \sup_{n\ge1} |x_n| < \infty\},$$

其上的距离为

$$\rho(x,y) = \sup_{n\ge1} \left|x_n - y_n\right|, \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\}.$$

证明. 当 $p < \infty$ 时, 见习题.

当 $p = \infty$ 时, 令

$$S := \{\{x_n\} : x_n = 0或1, \forall n \ge 1\},$$

则 $S \subset l^\infty$. 则 S 不可数并且 $\rho(x,y) = 1(\forall x \ne y \in S)$.

反设 l^∞ 可分, 则存在可数稠密子集 $\{e^{(n)}\}_1^\infty$, 从而

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(e^{(n)}, \frac{1}{3}) \cap S,$$

但 S 中任意两点间的距离均为 1, 不可能在同一个球 $B(e^{(n)}, \frac{1}{3})$ 内, 因此上式右侧至多可数, 而左侧不可数, 矛盾. □

1.3.2 紧集

定义 1.3.17: 紧集

设 (X,ρ) 是度量空间, $A \subset X$. 若 A 的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则称 A 是**紧集**.

性质 1.3.18

度量空间中的紧集都是闭集.

证明. 设 A 是度量空间 (X,ρ) 中的紧集. 任取 $x_0 \in A^c$, 则

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \supset A$$

构成一个 A 的开覆盖, 其中 $r_x = \frac{1}{3}\rho(x, x_0)$. 由 A 是紧集可知, 存在 $x_1, \cdots, x_n \in A$ 以及 $r_{x_1}, \cdots, r_{x_n}$ 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_{x_k}).$$

对上式两边同时取余集可得

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} B(x_k, r_{x_k})^c \subset A^c,$$

由于 $x_0 \notin B(x, r_x), \forall x \in A$, 故 $x_0 \in V$, 而 V 包含 x_0 的一个开领域. 故 $x_0 \in (A^c)^\circ$, 从而 A^c 是开集, A 是闭集. □

性质 1.3.19

度量空间中紧集的闭子集还是紧集.

证明. 设 A 是 (X,ρ) 中的紧集, B 是 A 的闭子集. 设

$$\bigcup_{\alpha} B_\alpha \supset B$$

是 B 的开覆盖, 则由 B 是闭集,

$$B^c \cup \bigcup_{\alpha} B_\alpha \supset A$$

是 A 的开覆盖. 根据 A 的紧性, 有

$$B^c \cup \bigcup_{k=1}^{n} B_{\alpha_k} \supset A$$

是 A 的有限覆盖, 从而

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_{\alpha_k} \supset B$$

是 B 的有限覆盖. 因此 B 是紧集. □

性质 1.3.20

设 A 是 (X,ρ) 中的紧集, $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset A$ 为闭集, 并且其中任意有限个的交集非空, 也即

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{\lambda_k} \neq \varnothing, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda.$$

则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$.

证明. 反设 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \varnothing$, 则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c = X \supset A$$

构成 A 的开覆盖. 而 A 是紧集, 因此存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_{\lambda_k}^c \supset A,$$

对上式取余集可得

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{\lambda_k} \subset A^c.$$

而上式左侧是 A 的子集, 并且非空, 故存在 $x \in A$ 使得 x 在上式左侧中, 从而也属于上式右侧, 也即 $x \in A \cap A^c = \varnothing$, 矛盾. □

引理 1.3.21

设 (X,ρ) 是度量空间, A 是 X 中的闭集. 若对于 A 的闭子集族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足其中任意有限个的交集非空, 都有

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \varnothing.$$

则 A 是紧集.

证明. 设 $\{V_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ 是 A 的开覆盖. 则

$$\bigcap_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma^c \subset A^c,$$

上式两侧同时与 A 取交集可得

$$A \cap \bigcap_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma^c \subset \varnothing,$$

此即

$$\bigcap_{\sigma\in\Sigma} A \setminus V_\sigma = \varnothing.$$

而 $\{A\setminus V_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ 是 A 的闭子集族, 故必存在 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n \in \Sigma$ 使得

$$\bigcap_{k=1}^{n} A\setminus V_{\sigma_k} = \varnothing \Longrightarrow A \cap \bigcap_{k=1}^{n} V_{\sigma_k}^c = \varnothing \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{n} V_{\sigma_k}^c \subset A^c \Longrightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{\sigma_k}.$$

故存在有限子覆盖, A 是紧集. □

引理 1.3.22

设 A 是度量空间 (X,ρ) 中的紧集, $\{x_n\} \subset A$ 两两互异, 则 $\{x_n\}$ 必存在聚点.

☞ **注**

点列有聚点即有收敛子列, 从而紧集是列紧的, 而紧集还是闭的, 因此紧集必是自列紧集.

证明. 反证法. 反设 $\{x_n\}$ 没有聚点, 则 $\forall q\in A$, 存在 q 的领域 V_q 使得 $V_q\cap\{x_n\}$ 中至多有一个元素. 注意到

$$A\subset\bigcup_{q\in A}V_q$$

以及 A 是紧集, 则存在有限子覆盖

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}V_{q_k},$$

而上式中, 因为 $\{x_n\}$ 两两互异且包含于 A, A 中有 $\{x_n\}$ 中无穷多个点. 但右侧每个 V_{q_k} 至多有 $\{x_n\}$ 中一个点, 从而右侧至多有 $\{x_n\}$ 中有限多个点, 矛盾. □

引理 1.3.23

设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$. 若 A 是自列紧集, 则 A 必是紧集.

☞ **注**

此引理及引理1.3.22可推出度量空间中紧集和自列紧集等价.

证明. 反证法. 对于 A 的一个开覆盖 $\cup_\lambda G_\lambda\supset M$, 反设其不存在有限覆盖. 由于 A 是自列紧的, 因此 A 作为一个度量空间是完备的, 从而是完全有界的. 记 A 的一个有穷 $\frac{1}{n}$ 网为 N_n, 则

$$A\subset\bigcup_{y\in N_n}B(y,\frac{1}{n}).$$

因此, $\forall n$, 存在 $y_n\in N_n$ 使得 $B(y_n,\frac{1}{n})$ 不能被有限多个 G_λ 覆盖. 对于 $\{y_n\}\subset A$, 必然存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛到 A 中的点 $y_0\in G_{\lambda_0}$. 由 G_{λ_0} 是开集知存在 $\delta>0$ 使得 $B(y_0,\delta)\subset G_{\lambda_0}$. 取 k 使得 $n_k>\frac{2}{\delta}$, 并且 $\rho(y_{n_k},y_0)<\frac{\delta}{2}$, 则

$$\rho(x,y_0)\le\rho(x,y_{n_k})+\rho(y_{n_k},y_0)\le\frac{1}{n_k}+\frac{\delta}{2}<\delta,\quad\forall x\in B(y_{n_k},\frac{1}{n_k}).$$

因此

$$B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(y_0,\delta)\subset G_{\lambda_0},$$

这与每个 $B(y_n,\frac{1}{n})$ 不能被有限个 G_λ 覆盖矛盾. □

定理 1.3.24

度量空间中, 紧集与自列紧集等价.

证明. 由引理1.3.22和引理1.3.23可得. □

1.3.3 Arzela-Ascoli 定理

定义 1.3.25: M 与 $C(M)$

设 (M,ρ) 是度量空间, 若 M 本身是一个紧集, 则称 M 为**紧度量空间**. 记 $C(M)$ 为所有定义域为 M 的连续函数全体, 在其上定义距离为

$$d(x,y)=\max_{t\in M}\left|x(t)-y(t)\right|,\quad x,y\in C(M),$$

并且 $C(M)$ 是完备的.

☞ **注**

连续函数在紧集上能取到最大值以及 $C(M)$ 的完备性留作习题.

定义 1.3.26: 一致有界和等度连续

设 M 是紧度量空间, $F\subset C(M)$.

若存在 $\alpha>0$ 使得

$$|x(t)|\leq\alpha,\quad \forall x\in F,$$

则称 F 是**一致有界的**.

若 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon,\quad \forall t_1,t_2\in M,\rho(t_1,t_2)<\delta,\forall x\in F,$$

则称 F**等度连续**.

☞ **注**

一致有界即 F 在 $C(M)$ 中对于其中的度量 d 而言有界.

定理 1.3.27: Arzela-Ascoli 定理

设 (M,ρ) 是紧度量空间, $F\subset C(M)$. 则 F 在 $C(M)$ 中列紧的充要条件是 F 等度连续并且一致有界.

证明. 必要性: 设 F 在 $C(M)$ 中列紧, 则 F 完全有界, 从而一致有界. 还需证明等度连续. $\forall\varepsilon>0$, 取 $y_1,\cdots,y_n$ 为 F 的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网. 存在 $\delta_k>0$ 使得

$$\left|y_k(t)-y_k(t')\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall t,t'\in M,\rho(t,t')<\delta_k.$$

记 $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}\delta_k$, 则 $\forall x\in F$, 存在 y_k 使得 $x\in B(y_k,\frac{\varepsilon}{3})$, 从而

$$\begin{aligned}\left|x(t)-x(t')\right|\le&\left|x(t)-y_k(t)\right|+\left|y_k(t)-y_k(t')\right|+\left|y_k(t')-x(t')\right|\\ \le&2d(x,y_k)+\left|y_k(t)-y_k(t')\right|<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad\forall\rho(t,t')<\delta.\end{aligned}$$

因此 F 等度连续.

充分性: 由于 $C(M)$ 完备的, 而完备空间中列紧与完全有界等价, 故只要证明 F 完全有界. 以下三种方法中, 方法一和方法二证明 F 完全有界, 方法三直接证明 F 列紧.

方法一. 由于 M 是紧度量空间, 则 $\forall\delta>0$, 存在有穷 δ 网 $\{t_1,\cdots,t_{N_\delta}\}$. 令

$$S:=\{(x(t_1),\cdots,x(t_{N_\delta}))\in\mathbb{R}^{N_\delta}:x\in F\}.$$

由于 F 一致有界, 则若 $\alpha>0$ 是 F 的一个上界, 则 $\sqrt{N_\delta}\alpha$ 是 S 的一个上界, S 在 $\mathbb{R}^{N_\delta}$ 是有界的. 而有限维 Euclidean 中有界与完全有界等价, 故 S 在 $\mathbb{R}^{N_\delta}$ 中完全有界. $\forall\varepsilon>0$, S 存在有穷 ε 网

$$\left\{\begin{array}{l}(x_1(t_1),\cdots,x_1(t_{N_\delta})),\\(x_2(t_1),\cdots,x_2(t_{N_\delta})),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\(x_k(t_1),\cdots,x_k(t_{N_\delta})).\end{array}\right\}$$

下面证明 $x_1,\cdots,x_k$ 构成 F 的有穷 3ε 网. $\forall x\in F$, $(x(t_1),\cdots,x(t_{N_\delta}))\in S$. 存在 x_j 使得

$$\left|x(t_i)-x_j(t_i)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left|(x(t_1),\cdots,x(t_{N_\delta}))-(x_j(t_1),\cdots,x_j(t_{N_\delta}))\right| \\
&=\sqrt{\sum_{i=1}^{N_\delta}\left|x(t_i)-x_j(t_i)\right|^2}<\varepsilon,\quad \forall i=1,2,\cdots,N_\delta.
\end{aligned}
$$

则

$$\left|x(t)-x_j(t)\right|\le|x(t)-x(t_i)|+\left|x(t_i)-x_j(t_i)\right|+\left|x_j(t_i)-x_j(t)\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

其中, 为了使上式第一项和第三项 $<\varepsilon$, 取 δ 使得

$$\left|x(t)-x(t')\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in F,\forall t,t'\in M,\rho(t,t')<\delta.$$

因此 $x_1,\cdots,x_k$ 的确构成 F 的 3ε 网, F 在 $C(M)$ 中列紧.

方法二. 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|x(s)-x(t)|\le\frac{\varepsilon}{4},\quad \forall\rho(s,t)<\delta,x\in F.$$

取 M 中元素 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 构成 M 的一个 δ 网, 由 F 一致有界知 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}F(t_k)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界, 其中 $F(t)=\{x(t)\in\mathbb{R}:x\in F\}$. $\mathbb{R}$ 中的有界集一定是完全有界的, 因此存在 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}F(t_k)$ 的一个有限 $\frac{\varepsilon}{4}$ 网 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

记 L_φ 为所有从 $\{1,\cdots,n\}$ 到 $\{1,\cdots,m\}$ 的映射 φ 构成的集合. 又记

$$F_\varphi=\{x\in F:|x(t_k)-\beta_{\varphi(k)}|<\frac{\varepsilon}{4},\forall 1\le k\le n\}.$$

显然 $F=\bigcup\limits_{\varphi\in L_\varphi}F_\varphi$. 任取 $x,y\in F_\varphi$, 则

$$
\begin{aligned}
&|x(t)-y(t)| \\
\le&|x(t)-x(t_k)|+|x(t_k)-\beta_{\varphi(k)}|+|\beta_{\varphi(k)}-y(t_k)|+|y(t_k)-y(t)|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此同一个 F_φ 中任意两点距离小于 ε, 而 L_φ 是有限集, 因此从每个 F_φ 中取一个元

素 (有些 F_φ 可能为空集, 此时不取) 便得到 F 的一个 ε 网.

方法三. 因为紧度量空间 M 完全有界, 而由定理1.3.12知完全有界集可分, 故 M 是可分的, 记 $\{t_k\}$ 是 M 的一个可数稠密子集.

设 $\{x_n\}\subset F$, 要证明 $\{x_n\}$ 存在收敛子列. 对 t_1, 因为 F 完全有界, 故

$$\sup_{n\geq 1}|x_n(t_1)|\leq \sup_{x\in F}\|x\|<\infty,$$

$\{x_n(t_1)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界列, 必有子列 $\{x_n^{(1)}(t_1)\}$ 收敛于 $\alpha_1\in\mathbb{R}$. 对 $\{x_n^{(1)}\}$ 和 t_2 重复该过程, 得到 $\{x_n^{(1)}\}$ 的子列使得 $\{x_n^{(2)}(t_2)\}$ 收敛于 $\alpha_2\in\mathbb{R}$. 以此类推, 存在 $\{x_n^{(k)}\}$ 使得

$$x_n^{(k)}(t_k)\to\alpha_k,\quad \forall k\geq 1.$$

记 $y_n=x_n^{(n)}$ 为第 n 个子列的第 n 项, 则 $\forall t_k$, 当 $n\to\infty$ 时

$$y_n(t_k)\to\alpha_k.$$

下面证明 $\{x_n\}$ 的子列 $\{y_n\}$ 收敛, 由于 $C(M)$ 完备, 只需证明 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列. 由于 F 等度连续, 给定 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使得

$$\left|x(t)-x(t')\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall t,t'\in M,\rho(t,t')<\delta,\forall x\in F.$$

对此 $\delta>0$, 由定理1.3.12的证明过程不难看出, 存在 $\{t_k\}$ 中的有限多个 $t_1,\cdots,t_{k_0}$ 使得其构成 M 的 δ 网. 而 $y_n(t_k)\to\alpha_k$, 故存在充分大的 N 使得

$$\left|y_n(t_k)-y_m(t_k)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall m,n>N,\forall k\leq k_0.$$

$\forall t\in M$, 存在 $k\leq k_0$ 使得 $\rho(t,t_k)<\delta$, 故

$$\begin{aligned}&\left|y_n(t)-y_m(t)\right|\\ \leq&\left|y_n(t)-y_n(t_k)\right|+\left|y_n(t_k)-y_m(t_k)\right|+\left|y_m(t_k)-y_m(t)\right|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad \forall m,n>N.$$

上式即 $\|y_n-y_m\|<\varepsilon,\forall m,n>N$, 故 $\{y_n\}$ 是 $C(M)$ 中的 Cauchy 列. □

定理 1.3.28: l^p 中列紧集等价条件

设 $1\le p<\infty, A\subset l^p$. 则 A 列紧的充要条件为

(1) A 在 l^p 中有界;

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p<\varepsilon,\quad \forall x=\{x_n\}\in l^p.$$

证明. 留作习题, L^p 空间中列紧的等价条件见附录A.4. □

1.3.4 作业

✍ **题目1.3.1**. 证明 $l^p(1\le p<\infty)$ 可分.

解答. 记 E 为只有有限项不为 0 且所有项均为有理数的数列, 也即

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{Q}^n\times\{0\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2,\cdots,n\}}),$$

因此 E 是一个可数集. 下面证明对 $1\le p<\infty$, E 在 l^p 中稠密. 设 $x=\{x_n\}\in l^p$, 令 $x_n^{(m)}=\frac{[2^m x_n]}{2^m}, n\le m, x_n^{(m)}=0, n>m$. 则 $\{x^{(m)}\}\subset E$. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 M, 使得

$$\left(\sum_{n>m}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon,\quad \forall m\ge M.$$

因此,

$$\begin{aligned}\|x^{(m)}-x\|_p&\le\left(\sum_{n\le m}\left|\frac{[2^m x_n]}{2^m}-x_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n>m}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\left(\sum_{n\le m}\frac{1}{2^{mp}}\right)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon\le\frac{m^{\frac{1}{p}}}{2^m}+\varepsilon,\end{aligned}$$

在上式中令 $m\to\infty$, 再由 ε 的任意性可得 $x^{(m)}\to x$. 从而 E 在 $l^p(1\le p<\infty)$ 中稠密.

✍ **题目1.3.2.** 证明 $L^\infty[a,b]$ 不可分.

解答. **方法一**. 记

$$f_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})},$$

其中 $\alpha_n=0$ 或 1, 则 $\{f_\alpha\}$ 不可数 (与 $\mathbb{R}$ 等势), 但

$$\left\|f_\alpha-f_\beta\right\|_\infty=1,\quad \forall\alpha\ne\beta.$$

记 F 为 f_α 全体, 则如果 L^∞ 有可数稠密子集 $\{g_n\}_1^\infty$, 则

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}B(g_n,\frac{1}{3})\cap F,$$

由于 F 中任意两点间的距离为 1, 不可能在同一半径为 $\frac{1}{3}$ 的球内, 因此右侧每个球内至多有一个 F 中的元素, 从而右侧是可数的, 但左侧是不可能的矛盾. 因此 $L^\infty[a,b]$ 不可分.

方法二. 反设 $L^\infty[a,b]$ 可分, 则存在可数稠密集 $\{x_n\}$. 注意到对每个 $\chi_{[a,t]}(t\in[a,b])$, 存在 $n(t)$ 使得

$$\left\|\chi_{[a,t]}-x_{n(t)}\right\|_\infty<\frac{1}{2},$$

并且 $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ 且 $t_1\ne t_2$, 有

$$\left\|\chi_{[a,t_1]}-\chi_{[a,t_2]}\right\|_\infty=1.$$

故若 $n(t_1)=n(t_2)$, 由

$$\left\|\chi_{[a,t_1]}-\chi_{[a,t_2]}\right\|_\infty\le\left\|\chi_{[a,t_1]}-x_{n(t_1)}\right\|+\left\|x_{n(t_2)}-\chi_{[a,t_2]}\right\|<1$$

可知必有 $t_1=t_2$(否则左侧为 1). 因此 $n(t)$ 是从 $[a,b]$ 到 $\mathbb{N}$ 的单射, 但不可数集到可数集不存在单射, 矛盾.

✍ **题目1.3.3.** 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体, 在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in F, y=\{\eta_k\}\in F$, 求证: (F,ρ) 不完备, 并指出它的完备化空间.

解答. 反例: 令 $x^{(k)}=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k},0,0,\cdots\}$, 则 $x^{(k)}\to\{\frac{1}{n}\}_1^\infty\notin F$.

F 的完备化空间是所有收敛于 0 的实数列全体 M. 设 (F_1,ρ_1) 为 (F,ρ) 中的基本列等价类组成的完备化空间, 下面证明 (F_1,ρ_1) 与 (M,ρ) 等距同构. 构造映射 $\sigma: M\to F_1$. 设 $\{x_n\}\in M$, 记 $x^{(k)}=\{x_1,\cdots,x_k,0,\cdots\}$, 则

$$\rho(x^{(k)},x^{(k+p)})=\sup_{k+1\leq n\leq k+p}|x_n|\to 0,\quad k\to\infty,\forall p,$$

因此 $x^{(k)}$ 为 F 中的基本列. 令 $\sigma(\{x_n\})=\{x^{(k)}\}\in M$, 则

$$\begin{aligned}\rho_1(\sigma(\{x_n\}),\sigma(\{y_n\}))&=\rho_1(\{x^{(k)}\},\{y^{(k)}\})=\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},y^{(k)})\\&=\lim_{k\to\infty}\sup_{1\leq n\leq k}|x_n-y_n|=\sup_{n\geq 1}|x_n-y_n|=\rho(\{x_n\},\{y_n\}),\quad\forall\{x_n\},\{y_n\}\in M,\end{aligned}$$

并且显然 σ 是满射, 因此 σ 是一个等距同构映射, M 和 F 等距同构.

✍ **题目1.3.4.** 在完备度量空间 (X,ρ) 中给定点列 $\{x_n\}$, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在基本列 $\{y_n\}$, 使得

$$\rho(x_n,y_n)<\varepsilon,\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛.

解答. 任取 $\varepsilon>0$, 存在基本列 $\{y_n\}$ 使得 $\rho(x_n,y_n)<\varepsilon,\forall n$. 从而

$$\rho(x_m,x_n)\leq\rho(x_m,y_m)+\rho(y_m,y_n)+\rho(y_n,x_n)\leq 2\varepsilon+\rho(y_m,y_n),$$

在上式中令 $m,n\to\infty$, 再由 ε 的任意性知 x_n 是基本列, 从而收敛.

✍ **题目1.3.5.** 在完备的度量空间中求证: 子集 A 列紧的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 A 的列紧的 ε 网.

解答. 充分性显然, 下面证明必要性: 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的点集. 在 A 的列紧的 1 网中存在点列 $\{y_n\}$ 使得 $\rho(x_n, y_n) < 1, \forall n$, 根据列紧性可知有子列 $\{y_n^{(1)}\}$ 收敛于 $y^{(1)}$, 因此从某项开始 (不妨设是第一项) 都有 $\rho(y_n^{(1)}, y^{(1)}) \le 1$. 从而

$$\rho(x_n^{(1)}, y^{(1)}) \le \rho(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) + \rho(y_n^{(1)}, y^{(1)}) \le 1 + 1 = 2, \forall n.$$

如此递归可以得到

$$\rho(x_n^{(k)}, y^{(k)}) \le \frac{2}{k}, \forall k.$$

从而

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \le \rho(x_{n+p}^{(n+p)}, y^{(n)}) + \rho(y^{(n)}, x_n^{(n)}) \le \frac{4}{n} \to 0,$$

$\{x_n^{(n)}\}$ 是基本列, 根据完备性知也是收敛列.

✍ **题目1.3.6.** 在度量空间中求证: 紧集上的连续函数必是有界的, 并且达到它的上下确界.

解答. 设 (X, ρ) 是度量空间,M 是 X 的紧子集, $f: M \to \mathbb{R}$ 连续. 任取 $f(M)$ 中的点列 $\{f(x_n)\}$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 M 中的点 x, 从而根据函数的连续性, $\{f_{n_k}\}$ 收敛到 $u(M)$ 中的点 $f(x)$, 故 $f(M)$ 也是紧的, 因此是有界闭集. 记

$$m = \inf_{x \in M} f(x),$$

由于 $f(M)$ 有界, 因此 $m \in \mathbb{R}$, 存在 M 中的点列 $\{y_n\}$ 使得 $f(y_n) \to m$, 从而存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛于 M 中的点 y, 且 $f(y) = \lim_k f(y_{n_k}) = m$. 令 $g = -f$, 则 g 的下确界也能取到, 也就是 f 上确界能够达到.

✍ **题目1.3.7.** 设 (X, ρ) 是度量空间, F_1, F_2 是它的两个紧子集, 求证: 存在 $x_i \in F_i (i = 1, 2)$ 使得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$, 其中

$$\rho(F_1, F_2) \xlongequal{\Delta} \inf\{\rho(x, y) \mid x \in F_1, y \in F_2\}.$$

解答. 任取 $x \in F_1, y \in F_2$, $\rho(F_1, F_2) \le \rho(x, y) < \infty$, 因此该定义有意义. 存在 $\{u_n\} \subset$

$F_1, \{v_n\} \subset F_2$, 使得 $\rho(u_n, \rho v_n) - \rho(F_1, F_2) \le \frac{1}{n}, \forall n$. 根据 F_1, F_2 的紧性, 存在子列 $\{u_{n_k}\}$ 收敛于 $x_1 \in F_1$, 存在子列的子列 $\{v_{n_{k_j}}\}$ 收敛于 $x_2 \in F_2$, 故

$$\rho(x_1, x_2) - \rho(F_1, F_2) \le \rho(x_1, u_{n_{k_j}}) + \rho(u_{n_{k_j}}), v_{n_{k_j}}) + \rho(v_{n_{k_j}}, x_2) \to 0 (j \to \infty),$$

因此 $\rho(x_1, x_2) = \rho(F_1, F_2)$.

✍ **题目1.3.8.** 设 $E = \{\sin nt\}_1^\infty$, 求证 E 在 $C[0, \pi]$ 中不是列紧的.

解答. 考虑 E 的点列 $\{\sin 10^n t\}_1^\infty$, 其中任意两点间的距离

$$\begin{aligned}\rho(\sin 10^{n+p} t, \sin 10^n t) &= \sup_{t\in[0,\pi]} |\sin 10^{n+p} t, \sin 10^n t| \\ &= 2 \sup_{t\in[0,\pi]} |\cos \frac{10^{n+p} + 10^n}{2} t| \cdot |\sin \frac{10^{n+p} - 10^n}{2} t| \\ &\ge \sqrt{2} |\cos \frac{1 + 10^{-p}}{1 - 10^{-p}} \cdot \frac{\pi}{4}| \ge \frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此不存在收敛子列, E 不是列紧的.

✍ **题目1.3.9.** 求证: S 空间的子集 A 列紧的充要条件是: $\forall n$, 存在 $C_n > 0$ 使得 $|x_n| \le C_n, \forall x \in A$.

解答. 必要性: 反设存在 $\{x^{(k)}\} \subset A$ 使得 $|x_n^{(k)}| \ge k, \forall k$. $\{x^{(k)}\}$ 的子列 $\{x^{(k_j)}\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n^{(k_j)}\}$ 收敛于 x_n, 但 $\{x_n^{(k_j)}\}$ 是无界的, 矛盾.

充分性: 对于 A 中的点列 $\{x^{(k)}\}$, 由于 $\{x_1^{(k)}\}$ 是有界的, 因此有收敛于 x_1 的子列 $\{x_1^{(k)(1)}\}$, 以此递归可知有收敛于 x_n 的子列 $\{x_n^{(k)(n)}\}$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 m 使得 $\sum\limits_{n>m} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 存在 N_n 使得当 $k \ge N_n$ 时有

$$|x_n^{(k)(n)} - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N = \max\limits_{1\le n\le m} N_n$, 则当 $n > N$ 时有

$$\rho(x, x^{(n)(n)}) \le \sum_{n\le m} 2^{-n} \frac{|x_n^{(n)(n)} - x_n|}{1 + |x_n^{(n)(n)} - x_n|} + \sum_{n>m} 2^{-n}$$

$$\le \sum_{n\le m} 2^{-n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\le \varepsilon,$$

因此 $\{x^{(n)(n)}\}$ 收敛于 x.

✍ **题目1.3.10.** 证明 $C(M)$ 关于距离 ρ 是良定义的完备度量空间 (良定义即证明对 $x\in C(M)$, $|x(t)|$ 能在 M 上取到最大值).

解答. 首先证明 $x\in C(M)$ 能取到 $|x(t)|$ 的最大值. 由于连续函数将紧集映为紧集, 而 $\mathbb{R}$ 上的紧集有界, 故

$$\alpha=\sup_{t\in M}|x(t)|<\infty.$$

取 $\{t_n\}\subset M$ 使得

$$\alpha-\frac{1}{n}\le x(t_n)\le\alpha,\quad \forall n\ge 1.$$

由于紧集必自列紧, 则存在子列 $\{t_{n_k}\}$ 收敛于 $t_0\in M$, 则在上式中将 n 替换为 n_k 并令 $k\to\infty$ 可得 $|x(t_0)|=\alpha$, 得证.

下面证明 $C(M)$ 完备. 设 $\{x_n\}$ 是 $C(M)$ 中的 Cauchy 列. 则对每个 $t\in M$, $\{x_n(t)\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列, 则其收敛, 记收敛于极限 $x(t)\in\mathbb{R}$. $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in M, n, m>N.$$

在上式中令 $m\to\infty$ 得

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in M, n>N.$$

此即 x_n 一致收敛于 x, 而每个 x_n 都是连续的, 故 x 也是连续的, 并且 $d(x,x_n)\to 0$, 故 $C(M)$ 完备.

✍ **题目1.3.11.** 设 $1\le p<\infty, A\subset l^p$. 证明: A 列紧的充要条件为

(1) A 在 l^p 中有界;

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p<\varepsilon,\quad \forall x=\{x_n\}\in l^p.$$

解答. 必要性: 若 A 列紧, 则必有界, 并且完全有界. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 A 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网 $\{y^k\}_1^K$. 存在 $N_\varepsilon>0$ 使得

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty}\left|y_n^k\right|^p<\frac{\varepsilon}{2},\quad k=1,\cdots,K.$$

$\forall x\in A$, 存在 y_k 使得 $\left\|x-y^k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty}|x_n|^p\leq\left\|x-y^k\right\|+\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty}\left|y_n^k\right|^p<\varepsilon.$$

充分性: 由于 l^p 完备, 只需证明 A 完全有界. $\forall\varepsilon>0$, 取 N 使得

$$\sum_{n>N}|x_n|^p<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall x\in A.$$

由于 A 有界, 故 A 在前 N 个坐标上的限制在 $\mathbb{R}^N$ 上有界, 而 $\mathbb{R}^N$ 上有界即完全有界, 故存在 $\{y^k\}_1^K\subset A$, 它们前 N 个坐标组成的点在 $\mathbb{R}^N$ 中是 A 的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网. 因此 $\forall x\in A$, 存在 y^k 使得

$$\left\|x-y^k\right\|^p\leq\sum_{n\leq N}\left|x_n-y_n^k\right|^p+\sum_{n>N}|x_n|^p+\left|y_n^k\right|^p<\varepsilon.$$

故 $\{y^k\}_1^K$ 构成 A 的 ε 网.

✍ **题目1.3.12.** 定义 $C_0^1(0,1)$ 上距离

$$\rho(f,g)=\left(\int_0^1\left|f-g\right|^2+\left|f'-g'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad f,g\in C_0^1(0,1).$$

证明:

$$S:=\{u\in C_0^1(0,1):\rho(u,0)<M<\infty\}$$

是 $C[0,1]$ 中 (关于其上的度量 d) 的列紧集.

解答. 由 Arzela-Ascoli 定理, 只需验证 S 在 $C[0,1]$ 中一致有界且等度连续. 由题目1.2.4(3) 可知

$$d(u,0)\leq\sqrt{2}\rho(u,0)<\sqrt{2}M,$$

故 S 一致有界. $\forall \varepsilon>0$, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, $\forall t_1<t_2$,

$$|u(t_2)-u(t_1)|=\left|\int_{t_1}^{t_2}u'(s)\mathrm{d}s\right|\le\left(\int_{t_1}^{t_2}\left|u'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}1^2\right)^{\frac{1}{2}}<M\sqrt{|t_2-t_1|},$$

故 S 等度连续.

✍ **题目1.3.13.** 证明: 集合

$$A=\left\{\{x_n\}\in l^2:\sum_{n=1}^{\infty}n^2|x_n|^2\le 1\right\}$$

在 l^2 中紧.

解答. 首先证明 A 在 l^2 中列紧, 为此, 分别验证 A 满足列紧的两个充要条件. 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}n^2|x_n|^2\le 1,\quad \forall x=\{x_n\}\in A$$

可知 A 有界. 对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $N>0$ 使得 $\frac{1}{N^2}<\varepsilon$, 则

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot|nx_n|^2<\frac{1}{N^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}|nx_n|^2\le\frac{1}{N^2}<\varepsilon,\quad \forall x\in A.$$

故 A 在 l^2 中列紧.

由于自列紧集就是列紧集, 还需证明 A 是闭集. 设 $x^k=\{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}\in A$ 并且 $x^k\to x\in l^2$. 注意到

$$\left|x_n-x_n^k\right|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-x_n^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

故当 $k\to\infty$ 时, $x_n^k\to x^k(\forall n\ge 1)$. 给定 $N\ge 1$, 有

$$\sum_{n=1}^{N}n^2\left|x_n^k\right|^2\le 1,$$

在上式中令 $k\to\infty$ 可得

$$\sum_{n=1}^{N}n^2|x_n|^2\le 1,\quad \forall N\ge 1.$$

令 $N\to\infty$ 即得 $x\in A$, 故 A 是闭集.

1.4 压缩映像原理

定义 1.4.1: 压缩映射与不动点

设 (X,ρ) 是度量空间, T 是从 X 到其本身的映射. 若存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\rho(Tx,Ty) < \alpha\rho(x,y), \quad \forall x,y \in X,$$

则称 T 是 X 上的**压缩映射**.

对 X 到本身的任意的映射 T, 若存在 $x \in X$ 使得

$$x = Tx,$$

则称 x 是 T 的**不动点**.

定理 1.4.2: Banach 不动点定理——压缩映像原理

设 (X,ρ) 是完备度量空间, T 是 X 上的压缩映射, 则 T 在 X 中存在唯一的不动点.

证明. 存在性: 任取 $x_0 \in X$, 记 $x_{n+1} = Tx_n$, 则

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(Tx_n,Tx_{n-1}) \le \alpha\rho(x_n,x_{n-1}) \le \alpha^n\rho(x_1,x_0),$$

从而

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},x_n) &\le \sum_{k=1}^{p}\rho(x_{n+k},x_{n+k-1}) \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{n+k}\rho(x_1,x_0) = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0) \to 0.\end{aligned}$$

根据完备性可知, $x_n \to x \in X$, 此时 $Tx_n = x_{n+1} \implies Tx = x$, 不动点存在. 唯一性: 若 y 也是不动点, 则

$$\rho(x,y) = \rho(Tx,Ty) \le \alpha\rho(x,y) \implies \rho(x,y) = 0 \implies x = y.$$

□

定理 1.4.3

设 (X,ρ) 是完备度量空间, T 是从 X 到其本身的映射. 若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 T^n 是 X 上的压缩映射, 则 T 在 X 中存在唯一的不动点.

证明. 存在性: 由定理1.4.2, T^n 在 X 上存在唯一的不动点 x, 即 $T^n x = x$. 从而 $T^n(Tx) = Tx$, 故 Tx 也是 T^n 的不动点, 但 T^n 的不动点是唯一的, 从而 $Tx = x$.

唯一性: 设还有 $y\in X$ 也是 T 的不动点. 则 $T^n y = y \implies T^n y = y$, 而 T^n 的不动点是唯一的, 故 $x = y$. □

1.4.1 应用

定理 1.4.4: 解的存在唯一性定理

设函数 $F(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]$ 上连续且满足局部 Lipschitz 条件: $\exists L>0$ 使得

$$t\in[-h,h], x_1,x_2\in[\xi-\delta,\xi+\delta] \implies |F(t,x_1)-F(t,x_2)|\le L|x_1-x_2|.$$

记

$$M = \sup_{\substack{t\in[-h,h]\\ x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]}} |F(t,x)|,$$

则当 $h<\min\{\frac{\delta}{M},\frac{1}{L}\}$ 时, 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t,x), \\ x(0)=\xi, \end{cases}$$

在 $[-h,h]$ 上存在唯一解.

证明. 初值问题等价于求连续函数 x 满足

$$x(t) = \xi + \int_0^t F(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

令 $Tx(t)=\xi+\int_0^t F(s,x(s))\mathrm{d}s$. 由 $h<\frac{\delta}{M}$,

$$|Tx(t)-\xi|=|\int_0^t F(s,x(s))\mathrm{d}s|\le hM<\delta,$$

因此 $T:C([-h,h],[\xi-\delta,\xi+\delta])\to C([-h,h],[\xi-\delta,\xi+\delta])$. 只要证明 T 是一个压缩映射即可. 事实上,

$$\rho(Tx_1,Tx_2)=\sup_{|t|\le h}|\int_0^t F(s,x_1(s))-F(s,x_2(s))\mathrm{d}s|\le Lh\rho(x_1,x_2).$$

□

定理 1.4.5: 隐函数存在定理

设 $f(x,y)=(f_1,\cdots,f_m):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m, U\times V\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 是 (x_0,y_0) 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 中的一个邻域. 设 f 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $U\times V$ 内连续, 并且 $f(x_0,y_0)=0, \frac{\partial f}{\partial y}$ 非奇异, 则存在 (x_0,y_0) 的一个邻域 $U_0\times V_0\subset U\times V$ 以及唯一的连续函数 $\varphi:U_0\to V_0$ 满足

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x))=0, x\in U_0,\\ \varphi(x_0)=y_0. \end{cases}$$

证明. 令 $T\varphi(x)=\varphi(x)-f(x,\varphi(x))$. 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 为单位阵 I(否则令 $g=f\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{-1}$ 即可), 由 f 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续知存在 $\delta,r>0$, 使得

$$\|I-\frac{\partial f}{\partial y}\|<\frac{1}{2},\|f(x,y_0)\|<\frac{1}{2}\delta,\quad \forall\|x-x_0\|\le r,\|y-y_0\|\le\delta,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为任意一种相容的矩阵 (向量) 范数. 令

$$\rho(\varphi,\psi)=\sup_{\|x-x_0\|\le r}\|\varphi(x)-\psi(x)\|,$$

由微分中值定理得

$$\rho(T\varphi,T\psi)=\sup_{\|x-x_0\|\le r}\|\varphi(x)-\psi(x)-f(x,\varphi(x))+f(x,\psi(x))\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|x-x_0\|\le r} \|\varphi(x)-\psi(x)-\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x)-\psi(y))\| \\
&= \sup_{\|x-x_0\|\le r} \|(I-\frac{\partial f}{\partial y})(\varphi(x)-\psi(x))\| \\
&\le \sup_{\|x-x_0\|\le r} \|I-\frac{\partial f}{\partial y}\| \cdot \sup_{\|x-x_0\|\le r} \|\varphi(x)-\psi(x)\| \\
&\le \frac{1}{2}\rho(\varphi,\psi),
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{y}(x) \in [\varphi(x),\psi(x)], \varphi,\psi \in X = \{\varphi \in C(\overline{B}(x_0,r),\overline{B}(y_0,\delta)) \mid \varphi(x_0) = y_0\}$, $\overline{B}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\| \le r\}$. 下面还需证明 $T: X \to X$. 由 $\varphi(x_0) = y_0$ 和 $f(x_0,y_0)$ 容易得到 $T\varphi(x_0) = y_0$. 此外,

$$
\begin{aligned}
\rho(T\varphi,y_0) &\le \rho(T\varphi,Ty_0)+\rho(Ty_0,y_0) \le \frac{1}{2}\rho(\varphi,y_0)+\sup_{\|x-x_0\|\le\delta}\|f(x,y_0)\| \\
&\le \frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta=\delta.
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 1.4.6

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, β 是 $\mathbb{R}$ 上的 *Lipschitz* 连续函数. 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意的 $f\in L^2(\Omega)$ 和 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 非线性 *PDE*

$$
\begin{cases}
-\Delta u+\varepsilon\beta(u)=f, & x\in\Omega, \\
u\Big|_{\partial\Omega}=0
\end{cases}
$$

存在唯一的弱解, 也即存在唯一的 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$
\int_\Omega Du\cdot Dv+\beta(u)v\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).
$$

证明. 考虑映射 $A: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega), u \mapsto w$, 其中 w 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta w = f - \varepsilon\beta(u), & x \in \Omega, \\ w\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的唯一弱解 (根据定理4.3.9, 弱解对 $f(u) \in L^2(\Omega)$ 存在唯一). 设 $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega), w_1 := Au_1, w_2 := Au_2$, 则

$$\int_\Omega Dw_1 \cdot (Dw_1 - Dw_2) + \varepsilon\beta(u_1)(w_1 - w_2)\mathrm{d}x = \int_\Omega (w_1 - w_2) f \mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega Dw_2 \cdot (Dw_1 - Dw_2) + \varepsilon\beta(u_2)(w_1 - w_2)\mathrm{d}x = \int_\Omega (w_1 - w_2) f \mathrm{d}x.$$

两式相减可得

$$\int_\Omega |Dw_1 - Dw_2|^2 \mathrm{d}x = \varepsilon \int_\Omega (w_2 - w_1)(\beta(u_1) - \beta(u_2))\mathrm{d}x.$$

若取 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数为 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \varepsilon \int_\Omega (w_2 - w_1)(\beta(u_1) - \beta(u_2))\mathrm{d}x \le \varepsilon L \int_\Omega |w_1 - w_2| \cdot |u_1 - u_2| \mathrm{d}x$$
$$\le \varepsilon L \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon CL \|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

从而

$$\|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \le \varepsilon CL \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon_0 CL \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)},$$

其中 $L > 0$ 是 β 的 Lipschitz 系数, 即 $\left|\beta(x) - \beta(y)\right| \le L\left|x - y\right| (\forall x, y \in \mathbb{R})$, $C > 0$ 是使得

$$\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x \le C \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

成立的常数 (引理4.3.7). 故取 $\varepsilon_0 = (CL)^{-1}$, 对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ 和 $f \in L^2(\Omega)$, A 都是压缩映射. 根据 Banach 不动点定理, A 有唯一的不动点, 就是定理中非线性 PDE 的唯一解. □

1.4.2 作业

✍ **题目1.4.1.** 使用完备度量空间的充要条件证明 Banach 不动点定理.

解答. 设 (X,ρ) 是完备度量空间, T 是 X 上的压缩映射, 对应系数为 $\alpha \in (0,1)$. 记

$$A_n = \left\{x \in X : \rho(x,Tx) \le \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

则 $A_n \supset A_{n+1}(n \ge 1)$. 由于 $\rho(x,Tx)$ 是 $X \to \mathbb{R}$ 的连续函数, 故由 $(-\infty, \frac{1}{n}]$ 在 $\mathbb{R}$ 中闭知每个 A_n 都是闭集. 每个 A_n 必然非空, 因为任取 $x \in X$, 对充分大的 N, 有

$$\rho(T^N x, T^{N+1}x) < \alpha\rho(T^{N-1}x, T^N x) < \cdots < \alpha^N \rho(x,Tx) < \frac{1}{n},$$

故 N 充分大时 $T^N x \in A_n$. 此外, 对 $x,y \in A_n$, 有

$$\begin{aligned} &\rho(x,y) \le \rho(x,Tx) + \rho(Tx,Ty) + \rho(Ty,y) \le \frac{2}{n} + \alpha\rho(x,y) \\ \Longrightarrow\ &\rho(x,y) \le \frac{2}{(1-\alpha)n}, \end{aligned}$$

故 $\{A_n\}$ 是一列单调下降的非空闭集列, 并且 $\operatorname{diam} A_n \to 0$, 由于 X 完备, 存在 $x_0 \in X$ 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\},$$

由 A_n 的定义不难看出 x_0 是 T 的唯一不动点.

✍ **题目1.4.2.** 设 $K(\cdot,\cdot) \in L^2([a,b]\times[a,b])$. 对给定 $f \in L^2[a,b]$, 证明: 当 $\lambda \in \mathbb{R}$ 充分小时, 积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在 $L^2[a,b]$ 中存在唯一解.

解答. 定义 $L^2[a,b]$ 到本身的映射 T 满足

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad x \in L^2[a,b].$$

T 是良定义的, 因为

$$\int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \le \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|^2\mathrm{d}s\right)\cdot \|x\|_2^2 \mathrm{d}t$$
$$=\|x\|_2^2\cdot \|K\|^2_{L^2([a,b]\times[a,b])}, \quad \forall x \in L^2[a,b].$$

应用上式可得,

$$\|Tx-Ty\|_2 \le |\lambda|\|K\|_{L^2([a,b]\times[a,b])}\cdot\|x-y\|_2, \quad \forall x,y\in L^2[a,b].$$

因此当 λ 充分小时, T 是压缩映射, 由 Banach 不动点定理, 存在唯一的不动点 $x\in L^2[a,b]$ 使得 $Tx=x$, 此即题中积分方程有 $L^2[a,b]$ 中的唯一解.

✍ **题目1.4.3.** 设 $K(\cdot,\cdot)\in C([a,b]\times[a,b])$. 对给定的 $f\in C[a,b]$, 证明: $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在 $C[a,b]$ 中存在唯一解.

解答. 定义 $C[a,b]$ 到本身的映射 T 满足

$$(Tx)(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad x\in C[a,b].$$

记 $\|\cdot\|$ 为 $C[a,b]$ 上的范数, 则

$$\begin{aligned}&\|T^n x-T^n y\|\\ =&|\lambda|^n\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t\int_a^{t_n}\cdots\int_a^{t_2}K(t,t_n)K(t_n,t_{n-1})\cdots K(t_2,t_1)x(t_1)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_n\right|\\ \le&\frac{|M\lambda|^n}{n!}\|x-y\|, \quad \forall x,y\in C[a,b],\end{aligned}$$

其中 $M=\sup\limits_{s,t\in[a,b]}|K(s,t)|$. 由于 $\frac{|M\lambda|^n}{n!}\to 0$, 故存在某个充分大的 n 使得 T^n 是压缩映射, 从而 T 存在唯一的不动点, 也即题中积分方程存在唯一解.

1.5 赋范线性空间

1.5.1 基本概念

定义 1.5.1: 范数, 赋范空间与 Banach 空间

设 X 是数域 $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$或$\mathbb{C})$ 上的线性空间, $\|\cdot\|$ 是一个定义在 X 上的非负实值函数, 满足

(1) 正定性: $\|x\| \geq 1(\forall x \in X)$ 并且 $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(2) 三角不等式: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|(\forall x, y \in X)$.

(3) 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|(\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X)$.

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个**范数**, X 称为**赋范线性空间**或**B^* 空间**.

若 X 在其上范数诱导的度量下完备, 则称 X 是**Banach 空间**或**B 空间**.

☞ **注**

赋范线性空间显然也是度量空间, 其上的度量为 $\rho(x,y) = \|x-y\|(x,y \in X)$. 反之, 若度量 ρ 满足平移不变性 $(\rho(x,y) = \rho(x-y,0), \forall x,y \in X)$ 以及齐次性 $(\rho(\alpha x,0) = |\alpha|\rho(x,0), \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X)$, 则在 X 上可以定义范数 $\|x\| = \rho(x,0)$.

若 X 不完备, 则存在在线性同构意义下 (满足线性性的同构映射) 的唯一的完备化空间 (证法与度量空间中完备化定理的证明类似, 只是多出了线性空间上的加法与数乘运算需要验证).

例 1.5.2: $C[a,b]$

在 $C[a,b]$ 上可以定义范数

$$\|x\| := \max_{t \in [a,b]} |x(t)|, \quad x \in C[a,b].$$

例 1.5.3: $L^p[a,b]$

在 $L^p[a,b](1 \leq p < \infty)$ 上可以定义范数

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p[a,b].$$

定义 1.5.4: 赋范空间中的无穷级数

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $\{x_n\} \subset X$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 称为 X 中的**无穷级数**. 称 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ 为级数的部分和.

若 $\{S_n\}$ 在 X 中依范数收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 X 中**收敛**, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 为 $\{S_n\}$ 的极限.

若 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是**Cauchy 级数**.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$**绝对收敛**.

定理 1.5.5: Banach 空间等价条件

设 X 是赋范空间, 则 X 是 Banach 空间的充要条件是: X 中的任意绝对收敛的级数必收敛.

证明. 必要性: 设 X 是 Banach 空间, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 X 中绝对收敛的级数. 则

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{M} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\| = \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \|x_n\|, \quad \forall N > M \geq 1.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$, 故当 $M \to \infty$ 时, 上式右端趋于 0, 从而级数的部分和序列是 Cauchy 列, 而 X 是 Banach 空间, 故部分和序列收敛, 也即该级数收敛.

充分性: 设 X 中任意绝对收敛的级数均收敛. 对 X 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 要证明 $\{x_n\}$ 收敛, 只需证明 $\{x_n\}$ 存在收敛子列. 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 故存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

由上式可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$, 此即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 绝对收敛, 从而该级数收敛, 记其收敛的极限为 y. 则不难看出 $\lim\limits_{k\to\infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) = y$, 从而 x_{n_k} 收敛于 $y + x_{n_1}$, 子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛, 故 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 也收敛. □

定义 1.5.6: 范数的强弱与等价

设线性空间 X 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 若满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_2=0 \implies \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1=0,$$

则称 $\|\cdot\|_2$ **比** $\|\cdot\|_1$ **强**.

若还有 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强, 则称两个范数**等价**.

命题 1.5.7: 范数强弱的等价条件

设线性空间 X 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 则 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强的充要条件为: 存在常数 $C>0$ 使得

$$\|x\|_1\le C\|x\|_2,\quad \forall x\in X.$$

证明. 充分性显然, 只证明必要性. 使用反证法. 反设存在 $x_n\in X$ 满足

$$\|x_n\|_1>n\|x_n\|_2,\quad \forall n\ge 1.$$

由上式, $x_n\ne 0(\forall n\ge 1)$. 令 $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则上式即

$$\|y_n\|_2<\frac{1}{n},\quad \forall n\ge 1.$$

故 $\|y_n\|_2\to 0$, 因此由 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强可知 $\|y_n\|_1\to 0$, 但根据 y_n 的定义,$\|y_n\|_1=1$, 矛盾. □

推论 1.5.8: 范数等价的充要条件

设线性空间 X 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价的充要条件为: 存在 $C_1,C_2>0$ 使得

$$C_1\|x\|_1\le\|x\|_2\le C_2\|x\|_1,\quad \forall x\in X.$$

1.5.2 有限维赋范空间

定理 1.5.9: 有限维赋范空间上的范数等价

设 X 是有限维赋范空间, $\dim X = n$. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 X 的一组基, 即 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ 使得

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \|x\| \le C_2 \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in X.$$

☞ **注**

上面说明按照 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 定义的范数与 X 的任意范数等价, 从而有限维赋范空间上的任意两个范数等价.

证明. 对于右半边不等式, $\forall x \in X$, 有

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面证明左半边不等式成立, 只要证明

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) e_i \right\| \ge C_1 > 0, \quad \forall x \in X.$$

记 $S = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le 1 \right\}$ 为 $\mathbb{K}^n$ 中的单位球面, 则只需证明

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in S$$

满足 $\inf\limits_{(x_1,\cdots,x_n)\in S} f(x_1,\cdots,x_n)>0$. 注意到对 $\forall (x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\in S$, 都有

$$\begin{aligned}&\left|f(x_1,\cdots,x_n)-f(y_1,\cdots,y_n)\right|=\left|\left\|\sum_{i=1}^n x_ie_i\right\|-\left\|\sum_{i=1}^n y_ie_i\right\|\right|\\ \le&\left\|\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)e_i\right\|\le C_2\left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

故 f 连续, 而 S 是 $\mathbb{K}^n$ 中的紧集, 故 f 在 K 上能取到最小值, 而在 K 上恒有 $f>0$(因为 $0\notin S$), 故 $C_1=\inf\limits_S f>0$. □

推论 1.5.10

- 有限维赋范线性空间是 Banach 空间.
- 任意赋范空间的有限维子空间均是闭子空间.
- 有限维赋范空间中集合的列紧与有界等价.

证明. 见作业. □

引理 1.5.11: Riesz 引理

设 X 是赋范空间, X_0 是 X 的真闭子空间. 则 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $y\in X$, $\|y\|=1$ 使得

$$\|y-x\|\ge 1-\varepsilon,\quad \forall x\in X_0,$$

也即 $\rho(y,X_0)\ge 1-\varepsilon$.

☞ **注**

一般来说 ε 不能取 0, 但若 X_0 是有限维的, 则对 $\varepsilon=0$ 也成立.

证明. 任取 $z\in X\setminus X_0$, 记 $d=\rho(x,X_0)>0$. $\forall\varepsilon\in(0,1)$. 存在 $x_0\in X_0$ 使得

$$d\le\|z-x_0\|\le\frac{d}{1-\varepsilon}.$$

令 $y=\frac{z-x_0}{\|z-x_0\|}$ 满足 $\|y\|=1$, 并且 $\forall x\in X$,

$$\|y-x\|=\left\|\frac{z-x_0}{\|z-x_0\|}-x\right\|=\frac{\|z-(x_0+\|z-x_0\|x)\|}{\|z-x_0\|}\ge\frac{d}{d/(1-\varepsilon)}=1-\varepsilon,$$

其中不等式成立是因为 $x_0+\|z-x_0\|x\in X_0$. □

定理 1.5.12

设 X 是赋范空间. 若 X 中的有界集均是列紧集, 则 $\dim X<\infty$.

证明. 方法一 (使用 Riesz 引理和反证法). 反设 $\dim X=\infty$. 取 $x_1\in X$ 满足 $\|x_1\|=1$. 记 $E_1=\mathrm{span}\{x_1\}$. 由于 X 是无穷维的, E_1 是 X 的真闭子空间, 故对 E_1 和 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 使用 Riesz 引理可得存在 $\|x_2\|=1$ 使得

$$\rho(x_2,E_1)\geq\frac{1}{2}.$$

记 $E_2=\mathrm{span}\{x_k\}_{k=1}^2$, 对 E_2 使用 Riesz 引理, 存在 $\|x_3\|=1$ 使得

$$\rho(x_3,E_2)\geq\frac{1}{2}.$$

由于 X 是无穷维的, 该过程可以无限次进行下去, 得到 $E_n=\mathrm{span}\{x_k\}_{k=1}^n$, $\|x_k\|=1(\forall k\geq1)$, 并且

$$\rho(x_{k+1},E_k)\geq\frac{1}{2}.$$

上式即

$$\|x_i-x_j\|\geq\frac{1}{2},\quad\forall i\neq j\quad 且\quad\|x_k\|=1,\quad\forall k\geq1.$$

由此得到的点列 $\{x_n\}$ 有界但不可能有收敛子列, 矛盾. 因此 X 是有限维的.

方法二 (拓扑的直接证明). 由于 $\overline{B}(0,1)$ 是有界闭集, 故是 X 中的紧集. 由

$$\overline{B}(0,1)\subset\bigcup_{x\in B(0,1)}B(x,\frac{1}{2})$$

和 $\overline{B}(0,1)$ 的紧性可知, 存在 $x_1,\cdots,x_m\in B(0,1)$ 使得

$$\overline{B}(0,1)\subset\bigcup_{k=1}^m B(x_k,\frac{1}{2}).$$

记 $Y=\mathrm{span}\{x_k\}_1^m$ 是 X 的有限维子空间, 故 Y 是闭子空间. 根据上式, 有

$$B(0,1)\subset Y+B(0,\frac{1}{2}),$$

根据球的对称性和 Y 是线性空间可知,

$$B(0,2^{1-n}) \subset Y + B(0,2^{-n}), \quad \forall n \geq 1.$$

故

$$\begin{aligned} B(0,1) \subset Y + B(0,\frac{1}{2}) \subset Y + Y + B(0,\frac{1}{4}) \\ = Y + B(0,\frac{1}{4}) \subset \cdots \subset Y + B(0,2^{-n}), \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

因此

$$B(0,1) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + B(0,2^{-n})).$$

由于 Y 是闭子空间, 故 $\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(Y + B(0,2^{-n})) \implies \exists x_n \in Y$ 使得 $\|x - x_n\| < 2^{-n} (\forall n \geq 1) \implies x \in \overline{Y} = Y$. 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(Y + B(0,2^{-n})) = Y$. 从而

$$B(0,1) \subset Y \implies X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nY = Y,$$

从而 $X = Y = \operatorname{span}\{x_k\}_1^m \implies \dim X \leq m$. □

推论 1.5.13

设 X 是赋范空间, $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 为 X 中的单位球面. 则 $\dim X < \infty$ 当且仅当 S 列紧.

证明. 若 $\dim X < \infty$, 则由推论1.5.10以及 S 有界知 S 列紧.

若 S 列紧, 由上一定理可得 X 必为有穷维. □

定理 1.5.14: 有限维子空间最佳逼近元的存在性

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, X_0 是 X 的有限维赋范空间. 则 $\forall x \in X$, 存在 $x_0 \in X_0$ 使得 $\|x - x_0\| = \rho(x, X_0) := \inf_{y \in X_0} \|x - y\|$.

☞ 注

设 $x\in X, A\subset X$, 若存在 $x_0\in A$ 使得 $\rho(x,A)=\|x-x_0\|$, 则称 x_0 是 x 在 A 上的最佳逼近元.

证明. 由下确界的定义可知, 存在 $\{x_n\}\subset X_0$ 使得

$$\rho(x,X_0)\le\|x-x_n\|\le\rho(x,X_0)+\frac{1}{n},\quad \forall n\ge 1.$$

由上式不难看出 $\{x_n\}$ 是 X_0 中的有界列, 而有限维赋范空间中的有界列必有收敛子列, 故存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x_0\in X_0$ 使得 $x_{n_k}\to x_0$. 从而在

$$\rho(x,X_0)\le\left\|x-x_{n_k}\right\|\le\rho(x,X_0)+\frac{1}{n_k}$$

中令 $k\to\infty$ 可得 $\|x-x_0\|=\rho(x,X_0)$. □

定义 1.5.15: 严格凸性

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间. 若对 X 中任意不同两点 x,y 满足 $\|x\|=\|y\|=1$, 以及 $\alpha\in(0,1)$ 都有

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|<1,$$

则称 X 是**严格凸**空间.

例 1.5.16: 严格凸与不严格凸的例子

在 $\mathbb{R}^2$ 中赋予三个范数

$$\|(x,y)\|_1=|x|+|y|,$$
$$\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\|(x,y)\|_\infty=\max\{|x|,|y|\},$$

则容易验证 X 关于 $\|\cdot\|_2$ 是严格凸的, 关于其余两个范数都是不是严格凸的.

定理 1.5.17: 严格凸空间中最佳逼近元的唯一性

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的赋范空间. 若对 $x\in X$, 存在 $x_0\in X_0$ 使得 $\|x-x_0\|=\rho(x,X_0)$, 则这样的 x_0 唯一.

证明. 设 $x_0,x_0'\in X_0$ 使得

$$\|x-x_0\|=\left\|x-x_0'\right\|=\rho(x,X_0).$$

反设 $x_0\neq x_0'$. 不妨设 $x\notin X_0$(若 $x\in X_0$, 则 $\|x-x_0\|=\left\|x-x_0'\right\|=\rho(x,X_0)=0\implies x_0=x_0'=x$.) 此时, 由严格凸性可知

$$1>\left\|\frac{1}{2}\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}+\frac{1}{2}\frac{x-x_0'}{\left\|x-x_0'\right\|}\right\|=\frac{\left\|x-\frac{x_0+x_0'}{2}\right\|}{\rho(x,X_0)}\geq 1,$$

矛盾. □

1.5.3 商空间

设 X_0 是赋范空间 X 的闭子空间. 对于 $x,y\in X$, 若 $x-y\in X_0$, 则记作 $x\sim y$. 容易验证 $\sim$ 是一个等价关系 (满足自反性, 对称性和传递性). 定义

$$X/X_0:=\{[x]=x+X:x\in X\},$$

其中 $[x]:=\{y\in X:x\sim y\}$. 在 X/X_0 上定义线性运算

$$\alpha[x]+\beta[y]=[\alpha x+\beta y],\quad x,y\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{K},$$

容易验证上式与代表元 x,y 的选取无关. 按照如上定义, X/X_0 构成一个线性空间 (其中的零元是 $[0]=X_0$). 再定义

$$\|[x]\|:=\rho(x,X_0),\quad x\in X.$$

不难看出 $\|[x]\| = \inf\limits_{z\in X_0} \|x-z\| = \inf\limits_{y\in[x]} \|y\|$.

下面验证 $\|[x]\|$ 是 X/X_0 上的一个范数. 非负性是显然满足的, 若 $\|[x]\| = 0$, 则根据 $\|[x]\|$ 的定义, 存在 $\{x_n\} \subset [x]$ 使得 $x_n \to 0$. 由于 X_0 是闭子空间, 并且 $x - x_n \in X_0$, 故令 $n \to \infty$ 可得 $x \in X_0$, 从而 $[x] = X_0$ 是零元, 因此正定性满足.

$\|[x]\|$ 显然满足对称性. 下面验证三角不等式. 对

$$\|[x]+[y]\| = \|[x+y]\| = \inf_{z\in[x+y]} \|z\|,$$

取 $x_n \in [x], y_n \in [y]$ 使得

$$\|x_n\| \to \|[x]\|, \quad \|y_n\| \to \|[y]\|, \quad n \to \infty.$$

此时 $x_n + y_n \in [x+y]$, 从而

$$\|[x]+[y]\| \le \|x_n + y_n\| \le \|x_n\| + \|y_n\|,$$

在上式中令 $n \to \infty$ 即可.

定义 1.5.18: 商空间

设 X 是赋范空间, X_0 是 X 的闭子空间, 则如上定义的赋范空间 X/X_0 称为 X 关于 X_0 的**商空间**.

☞ **注**

此处必须要求 X_0 是闭的, 否则对 $x \in \overline{X_0} \setminus X_0$ 有 $\|[x]\| = \rho(x, X_0) = 0$, 不满足正定性.

定理 1.5.19: Banach 空间的商空间仍是 Banach 空间

设 X_0 是 Banach 空间 X 的闭子空间. 则 X/X_0 也是 Banach 空间.

☞ **注**

反之, 若某个 X_0 闭子空间使得 X/X_0 是 Banach 空间, X 未必是 Banach 空间. 若对 X 的任意非平凡闭子空间 X_0, X/X_0 都是 Banach 空间, 则 X 也是

Banach 空间.

证明. 由定理1.5.5, 只需证明若 $\sum_{n=1}^{\infty}\|[x_n]\|<\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$ 收敛. 根据 $\|[x]\|$ 的定义, 存在 $y_n\in[x_n]$ 使得

$$\|[x_n]\|\le\|y_n\|\le\|[x_n]\|+2^{-n},\quad n\ge 1.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|[x_n]\|+2^{-n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\|[x_n]\|+1<\infty,$$

由于 X 是 Banach 空间, 存在 $x\in X$ 使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty}y_n$. 注意到 $[y_n]=[x_n],\forall n\ge 1$, 因此

$$\begin{aligned}\left\|[x]-\sum_{n=1}^{N}[x_n]\right\|&=\left\|[x]-\sum_{n=1}^{N}[y_n]\right\|\\&=\left\|\left[x-\sum_{n=1}^{N}y_n\right]\right\|\le\left\|x-\sum_{n=1}^{N}y_n\right\|\to 0,\quad N\to\infty,\end{aligned}$$

故 $[x]=\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$. □

定义 1.5.20: 自然同态

设 X 是赋范空间, X_0 是 X 的闭子空间. 称 $\pi:X\to X/X_0, x\mapsto[x]$ 是 X 到 X/X_0 的**自然同态**, 则 π 是线性, 连续的开映射 (将 X 中的开集映为 X/X_0 中的开集).

证明. 线性性显然, 连续性因为对 $x_n\to x, \|\pi(x_n)-\pi(x)\|=\|[x_n-x]\|\le\|x_n-x\|\to 0$.

还需证明 π 是开映射. 注意到 $B_{X/X_0}([x],r)=\pi(B_X(x,r))$, 因为若 $[y]\in B_{X/X_0}([x],r)$, 则 $\|[x]-[y]\|=\|[x-y]\|\le\|x-y\|\implies y\in B(x,r)\implies[y]\in\pi(B_X(x,r))$.

对 X 中的开集 W, 任取 $[x]\in\pi(W)$, 存在 $r>0$ 使得 $B_X(x,r)\subset W$. 因此 $B_{X/X_0}([x],r)\subset\pi(B_X(x,r))\subset\pi(W)$, 因此 $\pi(W)$ 也是开集. □

1.5.4 作业

✍ **题目1.5.1.** 证明: 有限维赋范线性空间是 Banach 空间.

解答. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是有限维空间, X 的一组基为 $e_1,\cdots,e_n$. 记

$$\|x\|_e=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in X$$

为与 $\|\cdot\|$ 等价的范数, 也即存在 $C,C'>0$ 使得

$$C\|x\|_e\le\|x\|\le C'\|x\|_e,\quad \forall x\in X.$$

设 $\{x^k\}$ 为 X 中的 Cauchy 列, 满足 $x^k=\sum\limits_{i=1}^n x_i^ke_i(k\ge1)$. 则由

$$\left(\sum_{i=1}^n\left|x_i^k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{C}\left\|x^k\right\|_e$$

知 $\{(x_1^k,\cdots,x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中的 Cauchy 列. 由 $\mathbb{K}^n$ 的完备性, $(x_1^k,\cdots,x_n^k)\to(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. 记 $x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$, 则

$$\left\|x-x^k\right\|\le C'\left\|x-x^k\right\|_e\to0,$$

因此 x^k 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x, 从而 X 完备.

✍ **题目1.5.2.** 设 X 是赋范空间, 证明 X 的任意有限维子空间均是闭子空间.

解答. 由上题, X 的有限维子空间 X_0 是 Banach 空间, 因此在 X 中闭.

✍ **题目1.5.3.** 证明: 有限维赋范空间中集合的列紧与有界等价.

解答. 设 X 是 n 维赋范空间, $\{x^k\}$ 是 X 中的有界列, 满足

$$\left\|x^k\right\|\le M,\quad \forall k\ge1.$$

沿用上上题的记号, 可得

$$\left\|x^k\right\|_e\le\frac{1}{C}\left\|x^k\right\|\le C'M,\quad \forall k\ge1.$$

因此 $\mathbb{K}^n$ 中的点列 $\{(x_1^k,\cdots,x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ 有收敛子列 $\{(x_1^{k_j},\cdots,x_n^{k_j})\}_{j=1}^\infty$ 依 $|\cdot|$ 收敛于 $(x_1,\cdots,x_n)\in$

$\mathbb{K}^n$. 记 $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$, 则由

$$\left\|x^{k_j}-x\right\| \le C'\left\|x^{k_j}-x\right\|_e$$

可知 $\{x^k\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 有收敛子列 $\{x^{k_j}\}$. 从而 X 中的有界集均是列紧的.

✍ **题目1.5.4.** 记

$$X := \{f \in C[0,1] : f(0)=0\},$$

其上的范数为

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right|, \quad f \in X.$$

又记

$$X_0 := \left\{f \in X : \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

证明: 不存在 $x_0 \in X, \|x_0\| = 1$ 使得 $\rho(x_0, X_0) \ge 1$.

解答. 反设存在这样的 x_0, 则 $x_0 \in X\setminus X_0$. 任取 $y \in X\setminus X_0$, 不难证明存在 $b\in\mathbb{K}$ 使得 $x_0 - by \in X_0$, 其中

$$b = \frac{\int_0^1 x_0(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 y(t)\mathrm{d}t}.$$

由于 $x_0 - b \in X_0$, $\left\|x_0-(x_0-by)\right\| = \left\|by\right\| \ge \rho(x_0, X_0) \ge 1$. 故

$$\|y\|\left|\int_0^1 x_0(t)\mathrm{d}t\right| \ge \left|\int_0^1 y(t)\mathrm{d}t\right|, \quad \forall y \in X\setminus X_0.$$

取 $y_n(t) = nt\chi_{[0,\frac{1}{n})}(t) + \chi_{[\frac{1}{n},1]}(t) \in X\setminus X_0$, 满足 $\left\|y_n\right\| = 1$ 且 $\int_0^1 y_n(t)\mathrm{d}t \to 1, n\to\infty$, 代入上式并令 $n\to\infty$ 可得

$$\left|\int_0^1 x_0(t)\mathrm{d}t\right| \ge 1.$$

注意到 $\|x_0\| = 1$, 故 $x_0 \equiv 1$, 矛盾.

✍ **题目1.5.5.** 在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 对每一点 $z=(x,y)$, 令

$$\|z\|_1 = |x|+|y|; \qquad \|z\|_2 = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\|z\|_3 = \max(|x|,|y|); \quad \|z\|_4 = (x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_i (i=1,2,3,4)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的范数.

(2) 画出 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i)(i=1,2,3,4)$ 各空间中的单位球面图形.

(3) 在 $\mathbb{R}^2$ 中取定三点 $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1)$, 试在上述四种不同范数下求出 ΔOAB 三边的长度.

解答. (1) 正定性和齐次性均显然满足, 只需验证三角不等式, 由 Minkowski 不等式可知,

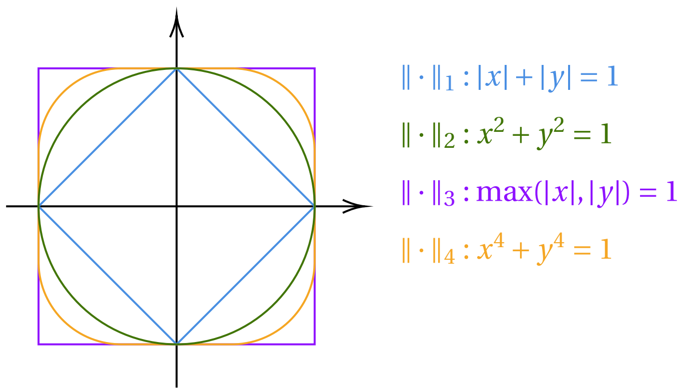
$$(|x_1+x_2|^p+|y_1+y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \le (|x_1|^p+|y_1|^p)^{\frac{1}{p}} + (|x_2|^p+|y_2|^p)^{\frac{1}{p}},$$

因此 $\|\cdot\|_i (i=1,2,4)$ 满足三角不等式. 对 $\|\cdot\|_3$, 有

$$\|z_1+z_2\|_3 = \max(|x_1+x_2|,|y_1+y_2|)$$
$$\le \max(|x_1|,|y_1|)+\max(|x_2|,|y_2|) = \|z_1\|_3+\|z_2\|_3.$$

因此 $\|\cdot\|_i (i=1,2,3,4)$ 均为范数.

(2) 四个范数的单位球面如下图:



(3)

$$\|OA\|_1=1, \quad \|OB\|_1=1, \quad \|AB\|_1=2,$$
$$\|OA\|_2=1, \quad \|OB\|_2=1, \quad \|AB\|_2=\sqrt{2},$$
$$\|OA\|_3=1, \quad \|OB\|_3=1, \quad \|AB\|_3=1,$$

$$\|OA\|_4=1,\quad \|OB\|_4=1,\quad \|AB\|_4=\sqrt[4]{2}.$$

✍ **题目1.5.6.** 在 $C^1[a,b]$ 中令

$$\|f\|_1=\sqrt{\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x},\quad \forall f\in C^1[a,b],$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数.

(2) 问 $(C^1[a,b],\|\cdot\|_1)$ 是否完备?

解答.

(1) 齐次性和正定性显然成立, 对于三角不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|_1^2=\int_a^b(|f+g|^2+|f'+g'|^2)\mathrm{d}x\\
\le&\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x+2\int_a^b(|fg|+|f'g'|)\mathrm{d}x+\int_a^b(|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x\\
\le&\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x+2\sqrt{\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b(|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x}\\
&+\int_a^b(|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x\\
=&\left(\sqrt{\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b(|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x}\right)^2=(\|f\|_1+\|g\|_1)^2.
\end{aligned}$$

(2) 不完备, 若令

$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}},\quad f(x)=|x|,\quad -1\le x\le 1.$$

则

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)|&=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x^2\right)}\le\frac{1}{n},\\
|f_n'(x)-f'(x)|&=\frac{1}{n^2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x^2\right)}\le\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

故

$$\|f-f_n\|_1^2 \le \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2}+\frac{2\arctan n}{n} \le \frac{2}{n^2}+\frac{\pi}{n} \to 0,$$

因此 $f_n \to f$, 但 $f \notin C^1[-1,1]$.

✍ **题目1.5.7.** 在 $C[0,1]$ 中, 对每一个 $f \in C[0,1]$, 令

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x}, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (1+x)|f(x)|^2\mathrm{d}x},$$

求证: $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数.

解答. 由 $1 \le 1+x \le 2, \forall x \in [0,1]$ 可得 $\|f\|_1 \le \|f\|_2 \le \sqrt{2}\|f\|_1$.

✍ **题目1.5.8.** 设 $BC[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体, 对每个 $f \in BC[0,\infty)$ 及 $a>0$, 定义

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_0^\infty e^{-ax}|f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_a$ 是 $BC[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 若 $a,b>0, a\neq 0$, 求证 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$ 作为 $BC[0,\infty)$ 上的范数是不等价的.

解答.

(1) 齐次性和正定性显然易见, 三角不等式由 Cauchy 不等式推得.

(2) 不妨设 $a<b$, 令 $f_n(x) = e^{ax/2}\chi_{[0,n]}(x) + e^{an/2}(n+1-x)\chi_{(n,n+1)}(x) \in BC[0,\infty)$. 并且

$$\frac{\|f_n\|_a^2}{\|f_n\|_b^2} \ge (b-a)n,$$

因此 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 不等价.

✍ **题目1.5.9.** 设 X_1, X_2 是两个 B^* 空间, 在 $X = X_1 \times X_2$ 上赋以范数

$$\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2), \quad \forall x = (x_1,x_2), x_i \in X_i, \|\cdot\|_i \text{ 是 } X_i \text{ 上的范数 } (i=1,2).$$

求证: 如果 X_1, X_2 是 B 空间, 那么 X 也是 B 空间.

解答. 设 $\{x^{(n)}\}$ 为 X 上的 Cauchy 列, 则

$$\|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\|_i \leq \|x^{(n)}-x^{(m)}\| \to 0, \quad n,m\to\infty (i=1,2),$$

因此 $\{x_i^{(n)}\}$ 为 X_i 中的 Cauchy 列, 收敛于 $x_i\in X_i$. 令 $x=(x_1,x_2)$, 则

$$\|x^{(n)}-x\| \leq \|x_1^{(n)}-x_1\|_1+\|x_2^{(n)}-x_2\|_2,$$

在上式中令 $n\to\infty$ 即可.

✍ **题目1.5.10.** 记 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体为 $\mathbb{P}_n$. 求证: $\forall f(x)\in C[a,b]$, $\exists P_0(x)\in\mathbb{P}_n$, 使得

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-P_0(x)|=\min_{P\in\mathbb{P}_n}\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-P(x)|.$$

也就是说, 如果用所有次数不超过 n 的多项式对 $f(x)$ 一致逼近, 那么 $P_0(x)$ 是最佳的.

解答. 由于 $\mathbb{P}_n=\mathrm{span}\{1,x,\cdots,x^n\}$, 因此 $\mathbb{P}_n$ 是有限维线性子空间, 最佳逼近元必存在.

✍ **题目1.5.11.** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 对 $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, 定义范数

$$\|x\|=\max(|x_1|,|x_2|),$$

并设 $e_1=(1,0), x_0=(0,1)$. 求 $a\in\mathbb{R}$ 适合

$$\|x_0-ae_1\|=\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x_0-\lambda e_1\|,$$

并问这样的 a 是否唯一? 请对结果做出几何解释.

解答. 注意到

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x_0-\lambda e_1\|=\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\max(1,|\lambda|)=1,$$

因此当 $|a|\leq 1$ 时是最小逼近元, 不唯一. 从 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ 中单位球面的图像 (见题目1.5.5的 $\|\cdot\|_3$) 不难看出, 正方形两个相邻顶点的中点仍在单位球面上, 因此该赋范空间不是

严格凸的, 从而最佳逼近元不一定唯一.

✍ **题目1.5.12.** 求证: 范数的严格凸性等价于下列条件:

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|(\forall x\neq 0, y\neq 0) \implies x=cy \ \ (c>0).$$

解答. 必要性: 设 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, 则必有 $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$, 否则,

$$1=\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|}=\left\|\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\cdot\frac{x}{\|x\|}+\frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\cdot\frac{y}{\|y\|}\right\|<1,$$

矛盾.

充分性: 设 $\|x\|=\|y\|=1$ 且 $x\neq y$, 若存在 $0<\alpha<1$ 使得 $\|\alpha x+(1-\alpha)y\|=1$(该范数不可能大于 1), 则 $\|\alpha x+(1-\alpha)y\|=\|\alpha x\|+\|(1-\alpha)y\| \implies \alpha x=c(1-\alpha)y \ \ (c>0) \implies x=y$, 矛盾.

✍ **题目1.5.13.** 设 X 是 B^* 空间, X_0 是 X 的线性子空间, 假定 $\exists c\in(0,1)$, 使得

$$\inf_{x\in X_0}\|y-x\|\leq c\|y\| \quad (\forall y\in X).$$

求证: X_0 在 X 中稠密.

解答. 任取 $x\in X$, 存在 $x_1\in X_0$ 使得 $\|x-x_1\|\leq\left(\frac{c+1}{2}\right)\|x\|$, 如此递归, 存在 $x_1,\cdots,x_n$, 使得

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leq\left(\frac{c+1}{2}\right)^n\|x\|\to 0,$$

因此 $\{x_1+\cdots+x_n\}\subset X_0$ 并收敛于 x, 从而 X_0 在 X 中稠密.

✍ **题目1.5.14.** 设 C_0 表示以 0 为极限的实数全体, 并在 C_0 中赋以范数

$$\|x\|=\max_{n\geq 1}|\xi_n| \quad (\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in C_0).$$

又设 $M\triangleq\left\{x=\{\xi_n\}_1^\infty\in C_0:\sum_{n=1}^\infty\frac{\xi_n}{2^n}=0\right\}$.

(1) 求证: M 是 C_0 的闭线性子空间.

(2) 设 $x_0=(2,0,0,\cdots)$, 求证:

$$\inf_{z\in M}\|x_0-z\|=1,$$

但 $\forall y\in M$ 有 $\|x_0-y\|>1$.

解答.

(1) 设 $\{x^{(k)}\}\subset M$ 且 $x^{(k)}\to x\in C_0$. 则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}\right|\le\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(k)}}{2^n}\right|+\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|x_n^{(k)}-x_n\right|}{2^n}\right|\le\left\|x-x^{(k)}\right\|\to 0,$$

令 $k\to 0$, 得 $x\in M$, 从而 M 是闭的. M 为线性子空间根据定义易得.

(2) 若存在 $y\in M$ 使得 $\left\|x_0-y\right\|\le 1$, 则 $|y_1|\ge 1,|y_n|\le 1,\forall n\ge 2$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 因此 $|y_n|$ 必然从某项开始小于 $\frac{1}{2}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}=0\implies\frac{1}{2}\le\left|\frac{y_1}{2}\right|=\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}\right|<\frac{1}{2},$$

矛盾, 因此 $\left\|x_0-y\right\|>1,\forall y\in M$. 下面证明 $\inf\limits_{z\in M}\|x_0-z\|=1$. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得 $2^{1-N}<\varepsilon$, 令 y 满足 $y_1=1-2^{1-N},y_n=-1(2\le n\le N),y_n=0(n>N)$, 此时显然 $y\in C_0,\left\|x_0-y\right\|=2^{1-N}<\varepsilon$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}=\frac{1-2^{1-N}}{2}-\sum_{n=2}^{N}2^{-n}=0\implies y\in M.$$

✍ **题目1.5.15.** 设 X 是 B^* 空间, M 是 X 的有限维真子空间. 求证: 存在 $y\in X,\|y\|=1$, 使得

$$\|y-x\|\ge 1\quad(\forall x\in M).$$

解答. 取 $y_0\in M^c$, 存在 $x_0\in M$ 使得 $\left\|x_0-y_0\right\|=\rho(y_0,M)>0$, 令 $y=\frac{y_0-x_0}{\left\|x_0-y_0\right\|}$, 则

$$\left\|y-x\right\|=\frac{\left\|y_0-(x_0+\left\|x_0-y_0\right\|x)\right\|}{\left\|x_0-y_0\right\|}\ge\frac{\left\|x_0-y_0\right\|}{\left\|x_0-y_0\right\|}=1,\forall x\in M.$$

1.6 内积空间

1.6.1 定义与基本性质

定义 1.6.1: 内积和内积空间

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $(\cdot,\cdot): X\times X\to\mathbb{K}$ 满足

(1) 共轭对称性: $(x,y)=\overline{(y,x)}(\forall x,y\in X)$.

(2) $(\cdot,z)$ 满足线性性: $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)(\forall x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{K})$.

(3) 正定性: $(x,x)\geq 0$ 且 $(x,x)=0\iff x=0(\forall x\in X)$.

则称 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的一个**内积**, X 称为**内积空间**.

命题 1.6.2: 内积的性质

设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, 则

(1) $(z,\cdot)$ 满足共轭线性性, 也即

$$(z,\alpha x+\beta y)=\overline{\alpha}(z,x)+\overline{\beta}(z,y),\quad \forall x,y,z\in X,\alpha,\beta\in K.$$

(2) 若 $x=0$ 或 $y=0$, 则 $(x,y)=0$.

(3) $\|x\|=\sqrt{(x,x)}(x\in X)$ 是 X 上的范数.

(4) $(\cdot,\cdot)$ 关于 $\|\cdot\|$ 连续, 即若 $x_n\to x,y_n\to y$, 则 $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

证明. (1) 由内积定义的 (1) 和 (2) 可得.

(2) $2(x,0)=(x,2\cdot 0)=(x,0)\implies(x,0)=0$. $(0,y)=\overline{(y,0)}=0$.

(3) 正定性由内积定义 (3) 可得, 齐次性由 (1) 和内积定义的 (2) 可得. 三角不等式:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=\|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2\\&\leq\|x\|^2+2\sqrt{\|x\|\cdot\|y\|}+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

其中不等号处使用了 Cauchy-Schwarz 不等式, 它的证明在下面给出.

(4) 由于 $\{y_n\}$ 收敛, 故存在 $M>0$ 使得 $\|y_n\|\le M(\forall n\ge 1)$, 则

$$\begin{aligned}\left|(x_n,y_n)-(x,y)\right| &\le \left|(x_n-x,y_n)\right|+\left|(x,y_n-y)\right|\\ &\le M\|x_n-x\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\|\to 0,\end{aligned}$$

上式中也使用了 Cauchy-Schwarz 不等式. □

引理 1.6.3: Cauchy-Schwarz 不等式

设 X 是内积空间, 令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}, x\in X$. 则

$$\left|(x,y)\right|\le\|x\|\cdot\|y\|,\quad \forall x,y\in X,$$

等号成立当且仅当 x,y 线性相关.

证明. 对 $x,y\in X$, 不妨设 $y\ne 0$(否则不等式显然成立). 任取 $\lambda\in\mathbb{K}$, 有

$$(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+2\operatorname{Re}\overline{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y)\ge 0.$$

在上式中取 $\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 则

$$(x,x)-2\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)}+\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)}\ge 0,$$

整理即得 $\left|(x,y)\right|\le\|x\|\cdot\|y\|$.

若等号成立, 不妨设 $y\ne 0$, 则

$$\left(x-\frac{(x,y)}{(y,y)}y,x-\frac{(x,y)}{(y,y)}y\right)=(x,x)-\frac{\left|(x,y)\right|}{(y,y)}=0\implies x=\frac{(x,y)}{(y,y)}y.$$

□

命题 1.6.4: 平行四边形等式和极化恒等式

在赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中可以引入满足 $\sqrt{(x,x)}=\|x\|(\forall x\in X)$ 的内积, 当且仅当范

数满足

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \forall x,y\in X,$$

上式称为平行四边形等式.

当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, 引入的内积为

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\quad \forall x,y\in X.$$

当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时, 引入的内积为

$$(x,y)=\frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|-i\|x-iy\|\Big),\quad \forall x,y\in X.$$

上面两式称为极化恒等式.

证明. 必要性:

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\=&\big((x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\big)+\big((x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)\big)\\=&2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \forall x,y\in X.\end{aligned}$$

充分性: 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 下面证明由

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\quad \forall x,y\in X$$

是一个内积. 首先, 注意到

$$\|2x+y\|^2=\|x+(x+y)\|^2=2\|x\|^2+2\|x+y\|^2-\|y\|^2,$$
$$\|2x-y\|^2=\|x+(x-y)\|^2=2\|x\|+2\|x-y\|^2-\|y\|^2,$$

两式相减并乘 $\frac{1}{4}$ 可得 $(2x,y)=2(x,y)$, 从而

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2,y)\\
=&2\left(\frac{x_1+x_2}{2},y\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{x_1+x_2}{2}+y\right\|^2-\left\|\frac{x_1+x_2}{2}-y\right\|^2\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(\left(\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2-\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|\right)\right.\\
&\left.-\left(\|x_1-y\|^2+\|x_2-y\|^2-\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|^2\right)\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(\left(\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2\right)-\left(\|x_1-y\|^2+\|x_2-y\|^2\right)\right)\\
=&(x_1,y)+(x_2,y).
\end{aligned}
$$

根据 $(\cdot,\cdot)$ 的定义它显然是一个连续函数, 因此要证明 $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 只需对 $\alpha\in\mathbb{Q}$ 证明该式即可. 事实上, 根据 $(x_1+x_2,y)=(x_1,x_2,y)$ 易得

$$
\begin{cases}
q\left(\frac{p}{q}x,y\right)=pq\left(\frac{1}{q}x,y\right)=p(x,y),\forall p,q\in\mathbb{N},\\
(x,y)+(-x,y)=(0,y)=0,
\end{cases}
$$

故 $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),\forall\alpha\in\mathbb{Q}$. 最后, 再由 $(x,y)=(y,x),(x,x)=\|x\|\geq 0,(x,x)=0\iff x=0$ 得到 $(\cdot,\cdot)$ 的确是一个内积.

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 的情形留作习题. □

例 1.6.5: 平行四边形等式的反例

在 $C[a,b]$ 中不可能引入一种内积 $(\cdot,\cdot)$, 使其满足

$$\sqrt{(f,f)}=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|,\quad\forall f\in C[a,b].$$

证明. 若 $C[a,b]$ 可以引入题设内积, 则范数 $\|\cdot\|$ 满足三角恒等式, 也即

$$\max_{a\leq x\leq b}|f+g|^2+\max_{a\leq x\leq b}|f-g|^2=2\left(\max_{a\leq x\leq b}|f|^2+\max_{a\leq x\leq b}|g|^2\right),$$

但显然 $f(x)=\frac{x-a}{b-a}, g(x)=1(\forall x\in[a,b])$ 不满足上式. □

定义 1.6.6: Hilbert 空间

若内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$ 关于内积诱导的范数完备, 则称 X 是**Hilbert 空间**.

定理 1.6.7: 内积空间的完备化

设 X 是内积空间, X 作为赋范空间的完备化空间记为 X_0. $\forall x,y\in X_0$, 存在 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$ 使得 $x_n\to x, y_n\to y$. 令

$$(x,y)_{X_0}:=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n),$$

则上述极限存在且不依赖于 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 并且 $(X_0,(\cdot,\cdot)_{X_0})$ 是 *Hilbert* 空间.

证明. 首先验证极限由存在. 由

$$\begin{aligned}\left|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\right|&\le\left|(x_n,y_n-y_m)\right|+\left|(x_n-x_m,y_m)\right|\\&\le\left(\sup_k\|x_k\|\right)\|y_n-y_m\|+\left(\sup_k\|y_k\|\right)\|x_n-x_m\|\end{aligned}$$

以及 $\{x_n\},\{y_n\}$ 收敛可知 $\{(x_n,y_n)\}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Cauchy 列, 故收敛.

接下来验证该极限与 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的选取无关. 设还有 $x_n'\to x, y_n'\to y$. 则

$$\begin{aligned}&\left|(x_n,y_n)-(x_n',y_n')\right|\\\le&\left|(x_n-x,y_n)\right|+\left|(x,y_n-y)\right|+\left|(x-x_n',y)\right|+\left|(x_n',y_n-y)\right|\to0,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n',y_n')$.

最后验证 $(\cdot,\cdot)_{X_0}$ 是 X_0 上的内积. 共轭对称性, 线性性以及非负性由 $(\cdot,\cdot)$ 是内积容易得到. 由 $\|\cdot\|_{X_0}$ 的定义 (定理1.2.5) 可知 $\|x\|_{X_0}^2=(x,x)_{X_0}$, 故也满足正定性.

$(X_0,(\cdot,\cdot)_{X_0})$ 是 Hilbert 空间由 $\|x\|_{X_0}^2=(x,x)_{X_0}$ 以及 $(X_0,\|\cdot\|_{X_0})$ 是 Banach 空间可得. □

1.6.2 正交与投影

定义 1.6.8: 正交

设 X 是内积空间. 若 $(x, y) = 0$, 则称 x 与 y **正交**, 记为 $x \perp y$.

设 M 是 X 的子集, 若 $x \perp y(\forall y \in M)$, 则称 x 与 M **正交**, 记为 $x \perp M$.

设 M, N 都是 X 的子集, 若 $\forall x \in M, y \in N$, 都有 $x \perp y$, 则称 M 与 N **正交**, 记为 $M \perp N$.

对 $M \subset X$, 称 $M^{\perp} := \{x \in X : x \perp M\}$ 为 M 的**正交补**.

命题 1.6.9: 正交和正交补的性质

(1) $x \perp y \iff y \perp x$.

(2) 对 X 的稠密子集 M, 若 $x \perp M$, 则 $x = 0$.

(3) 若 $M \subset N$, 则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

(4) 设 M 是 X 的子空间, 则 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

(5) 设 $x \perp y$, 则 $\left\|x + y\right\|^2 = \|x\|^2 + \left\|y\right\|^2$(勾股定理).

(6) 设 $M \subset X$, 则 $M^{\perp}$ 是 X 的闭子空间.

(7) 设 $M \subset X$, 记 M 张成的线性空间为

$$\operatorname{span} M := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i : x_i \in M, \alpha_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

则 $(\operatorname{span} M)^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} M})^{\perp} = M^{\perp}$.

证明. 每个都很显然, 只证明 (3), 由 M 稠密知存在 $x_n \to x$ 且 $\{x_n\} \subset M$ 满足 $(x_n, x) = 0$, 根据内积的连续性可知 $(x, x) = 0$, 从而 $x = 0$. □

引理 1.6.10: Hilbert 空间中闭凸集最佳逼近元的存在唯一性

设 X 是 *Hilbert* 空间, M 是 X 的闭凸子集, 则 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $y \in M$ 使得

$$\left\|x - y\right\| = \rho(x, M).$$

☞ **注**

若 M **满足** $\forall x, y \in M, \alpha \in [0, 1]$ **都有** $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$, **则称** M **是凸集**

证明. 由 $\rho(x,M)$ 的定义, 存在 $\{z_n\}\subset M$ 使得

$$\|x-z_n\|<\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho(x,M),\quad n=1,2,3,\cdots.$$

$\{z_n\}$ 是 Cauchy 列, 因为由平行四边形等式可得

$$\begin{aligned}&\|z_m-z_n\|^2=\|(z_m-x)+(x-z_n)\|^2\\ =&2(\|z_m-x\|^2+\|x-z_n\|^2)-\|z_m+z_n-2x\|^2\\ =&2\left(\|z_m-x\|^2+\|x-z_n\|^2\right)-4\left\|\frac{z_m+z_n}{2}-x\right\|^2\\ \leq&2\left(1+\frac{1}{m}\right)^2\rho(x,M)^2+2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\rho(x,M)^2-4\rho(x,M)^2\to 0,\end{aligned}$$

其中不等式成立是由于 M 是凸集, $\frac{z_m+z_n}{2}\in M$.

由 X 是 Hilbert 空间, 存在 $y\in X$ 使得 $z_n\to y$. 而 M 是闭集, 故 $y\in M$. 在

$$\rho(x,M)\leq\|x-z_n\|<\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho(x,M)$$

中令 $n\to\infty$ 可得 $\rho(x,M)=\|x-y\|$.

最后证明唯一性. 设 $y_1,y_2\in M$ 满足

$$\|x-y_1\|=\|x-y_2\|=\rho(x,M).$$

令 $y_{2n-1}=y_1,y_{2n}=y_2$, 则 $\|x-y_n\|\to\rho(x,M)$, 由上面的论证可知 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而 $y_1=y_2$. $\square$

引理 1.6.11: 投影定理

设 X 是 Hilbert 空间, M 是 X 的闭子空间, 则 $\forall x\in X$, 存在 $x_0\in M,x_1\in M^{\perp}$ 使得

$$x=x_0+x_1,$$

并且该分解是唯一的.

☞ **注**

x_0 称为 x 在 M 上的投影.

证明. 由于 M 是闭子空间, 则 M 是闭凸集, 根据上一引理, $\forall x\in X$, 存在唯一的 $x_0\in M$ 使得

$$\|x-x_0\|=\rho(x,M).$$

下面证明 $x-x_0\in M$. 任取 $y\in M$ 以及 $t\in\mathbb{R}$, 有 $x_0+ty\in M$, 则

$$\begin{aligned}
&\left\|x-(x_0+ty)\right\|\geq\rho(x,M)=\|x-x_0\|^2,\\
\Longrightarrow&\|x-x_0\|^2+t^2\left\|y\right\|^2-2t\operatorname{Re}(x-x_0,y)\geq\|x-x_0\|^2\\
\Longrightarrow&2t\operatorname{Re}(x-x_0,y)\leq t^2\left\|y\right\|^2\\
\Longrightarrow&\operatorname{Re}(x-x_0,y)=0.
\end{aligned}$$

若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, 则

$$\begin{aligned}
&\left\|x-(x_0+ity)\right\|^2\geq\|x-x_0\|^2\\
\Longrightarrow&2t\operatorname{Im}(x-x_0,y)\leq t^2\left\|y\right\|^2\\
\Longrightarrow&\operatorname{Im}(x-x_0,y)=0.
\end{aligned}$$

综上可得 $(x-x_0,y)=0(\forall y\in M)$. 从而 $x-x_0\perp M$. 取 $x_1=x-x_0$ 即可.

最后证明唯一性. 若 $x=x_0'+x_1'$, 由于还有 $x=x_0+x_1$, 则 $x_0-x_0'=x_1'-x_1\in M\cap M^\perp=\{0\}$, 从而 $x_0=x_0',x_1=x_1'$. □

推论 1.6.12

设 X 是 Hilbert 空间, M 是 X 的闭子空间且 $M\neq X$, 则 $M^\perp\neq\{0\}$.

证明. 由于 $M\neq X$, 存在 $x\in X\setminus M$ 以及 $x_0\in M,x_1\in M^\perp$ 使得 $x=x_0+x_1$, 则 $x_1\neq0$, 故 $M^\perp\neq\{0\}$. □

推论 1.6.13

设 X 是 Hilbert 空间, M 是 X 的子空间. 则 $\overline{M}=(M^\perp)^\perp$.

证明. 任取 $x \in M$, 则 $x \perp M^\perp$, 从而 $x \in (M^\perp)^\perp$, 因此 $M \subset (M^\perp)^\perp$. 再根据 $(M^\perp)^\perp$ 是闭集知, $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$.

反设 $M\overline{M} \neq (M^\perp)^\perp$. 若记 $Y := (M^\perp)^\perp$, 则 Y 是 Hilbert 空间. 由上一推论, 存在非零元 $x_0 \in Y$, x_0 属于 $\overline{M}$ 在 Y 中的正交补 $\overline{M}_Y^\perp \subset M^\perp$. 因此 $x_0 \in Y \cap M^\perp = (M^\perp)^\perp \cap M^\perp \implies x = 0$, 与 x 是非零元矛盾. □

☞ **注**

事实上, 若 E 是任意集合, 则 $M = \mathrm{span}E$ 是子空间, 并且有 $E^\perp = M^\perp$, 因此 $\overline{\mathrm{span}E} = (E^\perp)^\perp$.

推论 1.6.14

设 X 是 Hilbert 空间, M 是子空间. 若 $M^\perp = \{0\}$, 则 M 在 X 中稠密.

证明. 由上一推论, $\overline{M} = (M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = X$. □

定义 1.6.15: 直交合

设 M_1, M_2 是 Hilbert 空间的子空间. 若 $M_1 \perp M_2$, 则称 $M = M_1 + M_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$ 为 M_1 与 M_2 的**直交和**, 记为 $M = M_1 \oplus M_2$.

推论 1.6.16

设 X 是 Hilbert 空间, M 是 X 的子集, 则 $X = \overline{\mathrm{span}M} \oplus M^\perp$. 特别地, 若 M 是闭子空间, 则 $X = M \oplus M^\perp$.

1.6.3 正交系

定义 1.6.17: 正交系, 标准正交系和 Fourier 系数

设 X 是内积空间, $S \subset X$ 是一族非零向量.

若 S 中任何两个不同的向量正交, 则称 S 是 X 中的**正交系**.

若正交系 S 中每个向量的范数均为 1, 则称 S 是**标准正交系**.

设 S 为 X 中的标准正交系. 对于 $x \in X$, 称 $(x, e)(e \in S)$ 为 x 关于 e 的**Fourier 系数**.

由于在大多数情况下 (比如空间 L^2 和 l^2), S 是至多可数的, 因此下面只考虑这

种情况 (也即假设 S 都是至多可数的).

例 1.6.18: $L^2[0,2\pi]$

集合 $S:=\left\{\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 $L^2[0,2pi]$ 中的标准正交系, 并且 $f\in L^2[0,2\pi]$ 的 Fourier 系数为

$$f_n:=(f,\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{in\theta}\mathrm{d}\theta,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

例 1.6.19: l^2

$S:=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 中的标准正交系, 其中 e_n 是第 n 项为 0 其余为 1 的数列, $x=\{x_n\}\in l^2$ 的 Fourier 系数为 $(x,e_n)=x_n$.

定理 1.6.20: Bessel 不等式

设 X 是内积空间, $S=\{e_n\}_1^{\infty}$ 是 X 中的一个标准正交系, 则 $\forall x\in X$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\le\|x\|^2.$$

证明.

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n\right\|^2=\|x\|^2-2\operatorname{Re}\left(x,\sum_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n\right)+\left\|\sum_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n\right\|^2$$
$$=\|x\|^2-\sum_{n=1}^{m}\left|(x,e_n)^2\right|\ge 0,$$

上式即

$$\sum_{n=1}^{m}|(x,e_n)|^2\le\|x\|^2,\quad \forall m\ge 1.$$

令 $m\to\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\le\|x\|^2$. □

☞ **注**

若 S 是一般的标准正交系 (可能不可数), 则依旧有 $\sum_{e\in S}|(x,e)|\le\|x\|(\forall x\in X)$, 其中至多有可数个 (x,e) 非零, 证明见附录A.5.

推论 1.6.21

设 X 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}_1^\infty$ 是标准正交系, 则 $\forall x \in X$, $\sum\limits_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n \in X$ 且

$$\|x\|^2 = \left\|x - \sum_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n\right\|^2 + \left\|\sum_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n\right\|^2.$$

证明. 由 Bessel 不等式, $\forall x \in X$, $\sum\limits_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2 \le \|x\| < \infty$, 因此当 $m \to \infty$ 时,

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} (x, e_n)e_n\right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |(x, e_n)|^2 \to 0,$$

故由 X 是 Hilbert 空间知 $\sum\limits_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n$ 收敛. 推论中的等式由内积的连续性 (无穷求和与内积课交换) 不难证明. □

定理 1.6.22: Riesz-Fisher 定理

设 X 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}_1^\infty$ 是 X 中的标准正交系. 令 $\{c_n\}_1^\infty \in l^2$, 则存在唯一的 $x \in \overline{\mathrm{span}\{\mathrm{e_n}\}_1^\infty}$ 使得 $\{c_n\}_1^\infty$ 是 x 关于 e_n 的 Fourier 系数, 即

$$x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2.$$

证明. 令 $x_m := \sum_{n=1}^m c_n e_n$, 由于 $\{c_n\} \in l^2$, 则

$$\|x_{m+p} - x_m\|^2 = \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |c_n|^2 \to 0, \quad m \to \infty,$$

因此 $\{x_m\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 根据完备性可知存在 $x \in X$ 使得 $x = \sum\limits_{n=1}^\infty c_n e_n$. 另外,

$$(x, e_j) = \left(\sum_{n=1}^\infty c_n e_n, e_j\right) = c_j(e_j, e_j) = c_j,$$

因此 $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^\infty |c_n|^2$.

由于点列 $\left\{\sum\limits_{n=1}^m c_n e_n\right\}_{m=1}^\infty$ 的极限如果存在必唯一, 因此这样的 x 是唯一的. □

注

若 $S:=\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是标准正交系 (可能不可数), $\{c_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\subset\mathbb{K}$ 满足 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<\infty$, 则存在 $x\in\overline{\operatorname{span}S}$ 使得 c_λ 是 x 关于 e_λ 的 Fourier 系数.

注

若 Bessel 不等式中的等号成立, 则称为 Parseval 等式, 即

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|,\quad \forall x\in X.$$

定义 1.6.23: 正交系的完备与完全

设 $\{e_n\}_1^\infty$ 是内积空间 X 中的一个标准正交系, 若 $\forall x\in X$ 都有 Parseval 等式成立, 也即

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2,$$

则称 $\{e_n\}$ 是**完备的**.

若对于 $x\in X$ 满足 $(x,e_n)=0(\forall n)$, 都有 $x=0$, 则称 $\{e_n\}$ 是**完全的**.

定理 1.6.24: Hilbert 空间中正交系的完备与完全等价

设 X 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 X 中的标准正交系, 则下列条件等价:

(1) $\{e_n\}$ 完备.

(2) $\forall x\in X,\ x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$.

(3) $\forall x,y\in X,\ (x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}$.

(4) $\{e_n\}$ 完全.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 由于 $\{e_n\}$ 完备, 由定义知,

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2,\quad x\in X.$$

则由推论1.6.21知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\in X$, 并且

$$\|x\|^2=\left\|x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2,$$

因此

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|=0 \Longrightarrow x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3):

$$(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n,\sum_{m=1}^{\infty}(y,e_m)e_m\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)},\quad \forall x,y\in X.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4): 设 $x\in X$ 满足 $(x,e_n)=0,\forall n$. 则

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}=0,\quad \forall y\in X,$$

从而 $x=0$.

(4) $\Longrightarrow$ (1): $\forall x\in X$, 由 Bessel 不等式, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leq\|x\|^2$. 由 Riesz-Fisher 定理, 存在 $x_0\in\overline{\mathrm{span}\{\mathrm{e_n}\}}$ 使得

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n,\quad \|x_0\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2.$$

由于 $(x-x_0,e_n)=(x,e_n)-(x_0,e_n)=(x,e_n)-(x,e_n)=0(\forall n)$, 因此根据 $\{e_n\}$ 完全可知 $x-x_0=0$, 也即 $x=x_0$, 从而 Parseval 等式成立. □

☞ 注

若 X 是内积空间, 则 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4), 但未必有 (4) $\Longrightarrow$ (1).

☞ 注

设 X 是内积空间, 若 X 存在完备的可数标准正交系 $\{e_n\}$, 则 X 是可分的.

证明. 由 (2), $\forall x\in X, x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\in\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}$, 从而 $X=\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}$, 则

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}q_ke_k:q_k\in\mathbb{Q}(1\leq k\leq n),n\in\mathbb{N}\right\}$$

是 X 的可数稠密子集, 从而 X 可分. □

定理 1.6.25: Hilbert 空间可分充要条件

设 X 是 *Hilerbt* 空间, 则 X 可分的充要条件是: X 存在至多可数的完备正交系 S.

证明. 充分性由上一注记得到. 下面证明必要性. 由于 X 可分, 存在至多可数的稠密子集 $\{z_n\}_1^\infty$, 从而 $X=\overline{\operatorname{span}\{z_n\}_1^\infty}$, 取 $\{z_n\}$ 的线性无关子列 $\{x_n\}$ 使得 $\operatorname{span}\{z_n\}_1^\infty=\operatorname{span}\{x_n\}_1^\infty$. 使用 Gram-Schmidt 正交化, 令 $y_1=x_1, y_n=x_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{(x_n,y_i)}{(y_i,y_i)}y_i, e_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}$, 如此得到的 $\{e_n\}_1^\infty$ 满足 $\operatorname{span}\{e_n\}=\operatorname{span}\{x_n\}=\operatorname{span}\{z_n\}$, 并且 $\{e_n\}_1^\infty$ 两两正交. 从而 $X=\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_1^\infty}$, $\{e_n\}$ 是完备正交系. □

定理 1.6.26: 无穷维可分 Hilbert 空间的刻画

设 X 是无穷维可分的 *Hilbert* 空间, 则 X 与 l^2 等距同构.

☞ **注**

内积空间中的等距同构是指对 X_1, X_2, 存在从 X_1 到 X_2 的线性满射 T 满足 $(x,y)_{X_1}=(Tx,Ty)_{X_2}$, 此时 T 称为等距同构映射.

证明. 由上一定理, X 有完备正交系 $\{e_n\}_1^\infty$. 令

$$T: X\to l^2,\quad Tx=\{(x,e_n)\}\in l^2.$$

则由完备正交系的等价条件 (3) 知

$$(x,y)=\sum_{n=1}^\infty (x,e_n)\overline{(y,e_n)}=(Tx,Ty),\quad \forall x,y\in X,$$

而 T 显然是线性映射. 最后验证 T 是满射. 任取 $\{c_n\}\in l^2$, 由 Riesz-Fisher 定理知存在唯一的 $x\in X$ 使得 $(x,e_n)=c_n(\forall n)$, 此即 $Tx=\{c_n\}$, 从而 T 是满射.

因此 T 是等距同构映射, X 与 l^2 等距同构. □

☞ **注**

该定理表明所有无穷维可分 Hilbert 空间彼此同构.

☞ **注**

若 $\dim X = n < \infty$, 则同样的论述可以得到 X 与 $\mathbb{K}^n$ 等距同构.

定理 1.6.27

任何非零 *Hilbert* 空间均存在完备标准正交系.

证明. 该定理需要使用 Zorn 引理, 证明见附录A.5. □

1.6.4 作业

✍ **题目1.6.1**. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是复赋范空间 (数域为 $\mathbb{C}$), 满足平行四边形等式:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

则 X 上可以引入内积 $(\cdot,\cdot)$ 满足 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \forall x \in X$.

解答. 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 下面证明由

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\| - i\|x-iy\|\right), \quad \forall x, y \in X$$

定义的函数是一个内积. 若记 $(x,y)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$, 则

$$(x,y) = (x,y)_{\mathbb{R}} + i(x,iy)_{\mathbb{R}},$$

从而

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2, y)\\
=&(x_1,y)_{\mathbb{R}} + i(x_1,iy)_{\mathbb{R}} + (x_2,y)_{\mathbb{R}} + i(x_2,iy)_{\mathbb{R}}\\
=&(x_1,y) + (x_2,y).
\end{aligned}$$

再由 $(x,y) = \overline{(y,x)}$ 得 $(x, y_1+y_2) = (x, y_1+y_2)$. 从而

$$(\alpha x, y) = (\mathrm{Re}\,\alpha)(x,y) + (\mathrm{Im}\,\alpha)(ix,y) = (\mathrm{Re}\,\alpha)(x,y) + (\mathrm{Im}\,\alpha)\overline{(y,ix)}$$

$$=(\mathrm{Re}\,\alpha)(x,y)+(\mathrm{Im}\,\alpha)(y,x)_{\mathbb{R}}+(\mathrm{Im}\,\alpha)i(y,x)_{\mathbb{R}}=\alpha(x,y).$$

因此 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的内积.

✍ **题目1.6.2.** 判断并证明 $l^p(1\le p\le\infty)$ 是否满足平行四边形等式.

解答. $p=2$ 时满足平行四边形等式, 因为

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y}_n,\quad x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in l^2$$

是 l^2 上与范数相容的内积.

其余情况不满足平行四边形等式, 因为若记 e_n 是第 n 分量为 1 其余为 1 的数列, 则 $e_n\in l^p$ 且

$$\|e_1+e_2\|^2+\|e_1-e_2\|^2=2^{\frac{2}{p}+1}\neq 4=2(\|e_1\|^2+\|e_2\|^2).$$

✍ **题目1.6.3.** 求证: 在 $C[a,b]$ 中不可能引入一种内积 $(\cdot,\cdot)$, 使其满足

$$\sqrt{(f,f)}=\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|,\quad \forall f\in C[a,b].$$

解答. 若 $C[a,b]$ 可以引入题设内积, 则范数 $\|\cdot\|$ 满足三角恒等式, 也即

$$\max_{a\le x\le b}\left|f+g\right|^2+\max_{a\le x\le b}\left|f-g\right|^2=2\left(\max_{a\le x\le b}\left|f\right|^2+\max_{a\le x\le b}\left|g\right|^2\right),$$

但显然 $f(x)=\frac{x-a}{b-a},g(x)=1(\forall x\in[a,b])$ 不满足上式.

✍ **题目1.6.4.** 在 $L^2[0,T]$ 中, 求证: 函数

$$x\mapsto\left|\int_0^T e^{-(T-\tau)}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|,\quad \forall x\in L^2[0,T]$$

在单位球面上达到最大值, 并求出此最大值和达到最大值的元素 x.

解答. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 对任意 $\|x\|_2 = 1$, 有

$$\left|\int_0^T e^{-(T-\tau)} x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|^2 \le \left(\int_0^T e^{-2(T-\tau)}\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^T |x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2T}\right),$$

因此该函数在单位球面上的最大值为 $\sqrt{\frac{1-e^{-2T}}{2}}$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件, 达到最大值的元素为 $x(\tau) = \frac{e^{-(T-\tau)}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2T}}{2}}}, \tau \in [0, T]$.

✍ **题目1.6.5.** 设 M 是 Hilbert 空间 H 的子集, 求证

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span} M}.$$

解答. 记 $E = \overline{\mathrm{span} M}$ 为闭线性子空间, 显然 $(M^{\perp})^{\perp} = (E^{\perp})^{\perp}$, 只需证 $(E^{\perp})^{\perp} = E$ 即可.

任取 $x \in E$, 则 $\forall y \in E^{\perp}$, $y \perp x \implies x \in E^{\perp} \implies E \subset (E^{\perp})^{\perp}$.

下面证明若 $x \in E^c$, 则 $x \notin (E^{\perp})^{\perp}$. 由于 E 是闭子空间, 存在唯一正交分解 $x = y + z, y \in M, z \in M^{\perp}$. 如果 $x \perp E^{\perp}$, 则

$$(x, z) = (x, x-y) = (x-y, x-y) + (y, x-y) = (x-y, x-y) = 0,$$

从而 $x = y \in M$, 矛盾.

✍ **题目1.6.6.** 在 $L^2[-1,1]$ 中, 问偶函数集的正交补是什么? 证明你的结论.

解答. 偶函数的正交补是奇函数, 也即 f 是奇函数当且仅当 $f \perp g, \forall g$ 为 $L^2[-1,1]$ 上的偶函数 (此处的偶函数与奇函数均为几乎处处意义下).

必要性:

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x + \int_0^1 f(-x)\overline{g(-x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x + \int_0^1 (-f(x))\overline{g(x)}\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

充分性: 令 $g(x)=\overline{f(x)+f(-x)}$ 为偶函数, 则

$$(f,g)=\|f(x)+f(-x)\|_2^2=0 \implies f(x)+f(-x)=0 \quad \text{a.e.}$$

✍ **题目1.6.7.** 在 $L^2[a,b]$ 中, 考察函数集 $S=\{e^{2\pi inx}\}$.

(1) 若 $|b-a|\le 1$, 求证: $S^{\perp}=\{0\}$;

(2) 若 $|b-a|>1$, 求证: $S^{\perp}\ne\{0\}$.

解答. (1) $|b-a|=1$ 由 Fourier 分析知识, 有 $S^{\perp}=\{0\}$. 若 $|b-a|<1$, 补充定义 $f(x)=0, x\in(b,a+1]$ 即可.

(2) 若 $a<b-2$, 在 $[a,b-2)$ 上定义 $f\equiv 0$, 在 $[b-2,b-1]$ 上定义 $f\equiv -1$; 若 $b-2\le a<b-1$, 在 $[a,b-1]$ 上定义 $f\equiv -1$; 在 $(b-1,b]$ 上定义

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_a^{b-1}e^{2\pi int}\mathrm{d}t\right)e^{2\pi inx},\quad x\in(b-1,b],$$

其中 $\left|\int_a^{b-1}e^{2\pi int}\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{\pi n}$, 并且 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi inx}$ 对 x 一致有界, 由数学分析知识知如上定义的 f 有意义, 显然有 $f\in S^{\perp}$ 且 $f\ne 0$.

✍ **题目1.6.8.** 设 H 表示闭单位圆上的解析函数全体, 内积定义为

$$(f,g)=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)\overline{g}(z)}{z}\mathrm{d}z,\quad \forall f,g\in H.$$

求证: $\left\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ 是一组正交规范集.

解答.

$$\left\|\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{|z|^n}{z}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z=1|}\frac{\mathrm{d}z}{z}=1,\quad \forall n\ge 0,$$
$$2\pi i\left(\frac{z^m}{\sqrt{2\pi}},\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right)=\int_{|z|=1}\frac{z^m\overline{z}^n}{z}\mathrm{d}z=\int_{|z|=1}z^{m-n-1}\mathrm{d}z=0,\quad \forall m>n.$$

✍ **题目1.6.9.** 设 $\{e_n\}_1^{\infty},\{f_n\}_1^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的两个正交规范集, 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1.$$

求证: $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备.

解答. 设 $\{e_n\}$ 完备. 若 $0 \neq x \perp f_n, \forall n \geq 1$, 则

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(x, e_n - f_n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 \cdot \left|e_n - f_n\right|^2 < \|x\|^2,$$

矛盾, 因此 $\{f_n\}^{\perp} = \{0\}$, $\{f_n\}$ 也完备.

✍ **题目1.6.10.** 设 H 是 Hilbert 空间, H_0 是 H 的闭线性子空间, $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 分别是 H_0 和 $H_0^{\perp}$ 的正交规范基. 求证: $\{e_n\} \cup \{f_n\}$ 是 H 的正交规范基.

解答. 设 $x \in H$, 由 $x - P(x) \in H_0^{\perp}$ 和 $P(x) \in H_0 \subset (H^{\perp})^{\perp}$ 知 $(x - P(x), e_n) = (P(x), f_n) = 0, \forall n \geq 1$, 从而

$$\begin{aligned} x = P(x) + \big(x - P(x)\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big((P(x), e_n) e_n + (x - P(x), f_n) f_n\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big((x, e_n) e_n + (x, f_n) f_n\Big). \end{aligned}$$

✍ **题目1.6.11.** 设 X 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 X 中的正交规范集, 求证

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

解答.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|(y, e_n)\right|^2\right) \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

✍ **题目1.6.12.** 设 X 是一个内积空间, $\forall x_0 \in X, r > 0$, 令

$$C = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

(1) 求证: C 是 X 中的闭凸集.

(2) $\forall x \in X$, 令

$$y = \begin{cases} x_0 + \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|}, & x \notin C, \\ x, & x \in C. \end{cases}$$

求证: y 是 x 在 C 中的最佳逼近元.

解答. (1) 直接验证即可.

(2) 若 $x\in C$, 显然成立. 若 $x\notin C$, 则

$$\begin{aligned}\|x-z\|&=\|(x-x_0)-(z-x_0)\|\geq\|x-x_0\|-\|z-x_0\|\\&\geq\|x-x_0\|-r=\left\|x-y\right\|,\quad\forall z\in C.\end{aligned}$$

✍ **题目1.6.13.** 求 $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$ 使得 $\int_0^1\left|e^t-a_0-a_1t-a_2t^2\right|^2\mathrm{d}t$ 取最小值.

解答. 考虑 $L^2[0,1]$ 空间上的内积, 有

$$\begin{cases}a_0(1,1)+a_1(t,1)+a_2(t^2,1)=(e^t,1)\\a_0(1,t)+a_1(t,t)+a_2(t^2,t)=(e^t,t)\\a_0(1,t^2)+a_1(t,t^2)+a_2(t^2,t^2)=(e^t,t^2)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_0=39e-105\\a_1=-216e+588\\a_2=210e-570\end{cases}.$$

✍ **题目1.6.14.** 设 $f\in C^2[a,b]$, 满足边界条件

$$f(a)=f(b)=0,\quad f'(a)=1,\quad f'(b)=0.$$

求证:

$$\int_a^b\left|f''(x)\right|^2\mathrm{d}x\geq\frac{4}{b-a}.$$

解答. 令 $f(x)\mapsto f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 后, 不妨设 $a=0,b=1$. 记 $g(x)=x(x-1)^2$, 则

$$\begin{aligned}4\int_0^1\left|f''(x)\right|^2\mathrm{d}x&\geq\left(\int_0^1\left|g''(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1\left|f''(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)\\&\geq\left|\int_0^1f''(x)g''(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1g''(x)\mathrm{d}f'(x)\right|\\&=\left|f'(1)g''(1)-f'(0)g''(0)-6\int_0^1f'(x)\mathrm{d}x\right|=1.\end{aligned}$$

第二章 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子的概念

例 2.1.1: 微分和积分方程中的例子

对偏微分方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f,$$
$H := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ 是一个线性算子.

对积分方程
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x,$$
定义线性算子 T 将函数 y 映射为上式右端的函数, 则上述积分方程的解 y 就是线性算子 T 的不动点.

定义 2.1.2: 线性算子和线性泛函

设 X 与 Y 是数域 $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的线性空间, D 是 X 中的子空间, T 是从 D 到 Y 的映射. 若
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y, \quad \forall x, y \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$
则称 T 是**线性算子**.

☞ **注**

称 D 是 T 的定义域 (Domain), 记为 $D(T)$.

$R(T)$ 表示 T 的值域 (Range), 即 $R(T) = T(X)$.

$Ker(T) := \{x \in D : Tx = 0\}$ 称为 T 的零空间或核空间.

特别地, 取之于实数或复数的线性算子 (Y 为数域) 称为 线性泛函, 通常记为 $f(x)$ 或 $\langle f,x\rangle$.

例 2.1.3: 有限维空间上的线性泛函

设 X 是有限维线性空间. 若 $e_1,\cdots,e_n$ 是 X 的一组基, 则 X 上的线性泛函可以表示为

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\quad x=\sum_{j=1}^{n}x_j e_j\in X,$$

其中 $\alpha_j=f(e_j)$. 并且有

$$Ker(f)=\left\{x=\sum_{j=1}^{n}x_j e_j\in X:\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j=0\right\}.$$

定义 2.1.4: 算子的连续, 有界和无界

设 X 与 Y 均是赋范空间, $T:D(T)\to Y$. 若对 $x_n,x\in D(T)$, 当 $x_n\to x$ 时有 $Tx_n\to Tx$, 则称 T 在 x 点**连续**. 若 T 在 $D(T)$ 中每一点都连续, 则称 T**连续**.
若 T 将 D 中的任一有界集映为 Y 中的有界集, 则称 T**有界**.
反之, 若存在 D 中的有界集 A, 使得 $T(A)$ 在 Y 中无界, 则称 T**无界**.

例 2.1.5: $\mathbb{R}^2$ 上的旋转变换

对 $\theta\in[0,2\pi)$, 定义 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$T(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

则 T 是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的有界线性算子, 并且是连续的.

例 2.1.6: $C[a,b]$ 上的积分

定义

$$f(x):=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x\in C[a,b].$$

则 f 是 $C[a,b]$ 上的连续且有界的线性泛函.

证明. 线性性显然. 若 $x_n \to x$, 则

$$\left|f(x)-f(x_n)\right| \le \int_a^b \|x-x_n\| \mathrm{d}t = (b-a)\|x-x_n\| \to 0,$$

从而 f 是连续的. 设 A 是 $C[a,b]$ 上的有界集, 满足 $|x(t)| \le M(\forall x \in A, t \in [a,b]$, 则

$$\left|f(x)\right| = \left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right| \le (b-a)\|x\| \le (b-a)M,$$

故 f 是有界的. □

例 2.1.7: Dirac 函数

定义 $\langle\delta, f\rangle := f(0), \forall f \in C[-1,1]$, 则 δ 是 $C[-1,1]$ 上的线性泛函, 并且是连续并且有界的.

证明. 线性性: 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, f, g \in C[-1,1]$, 则

$$\begin{aligned}\langle\delta, \alpha f+\beta g\rangle &= (\alpha f+\beta g)(0)\\ =&\alpha f(0)+\beta g(0) = \alpha\langle\delta, f\rangle + \beta\langle\delta, g\rangle.\end{aligned}$$

连续性: 设 $f_n \to f$, 则 f_n 一致收敛于 f, 从而 $f_n(0) \to f(0)$, 也即 $\langle\delta, f_n\rangle \to \langle\delta, f\rangle$.

有界性: 设 A 在 $C[-1,1]$ 上有界, 则存在 $M\rangle 0$ 使得 $\|f\| \le M(\forall x \in A)$, 而 $\left|\langle\delta, f\rangle\right| = \left|f(0)\right| \le \|f\| \le M(\forall x \in A)$, 从而 $\delta(A)$ 有界. □

例 2.1.8: 有穷维赋范空间上的线性映射

设 T 是有穷维赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性映射, 则 T 必是连续的.

证明. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 X 的一组基, 则 $\forall x \in X$, 有

$$\|Tx\| = \left\|T\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right)\right\| \le \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|Te_k\| \le \max_{1\le k\le n} \|Te_k\| \sum_{k=1}^n |x_k|,$$

根据有限维空间上范数的等价性, 存在 $C > 0$ 使得

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \le C\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

从而

$$\|Tx\| \le C \max_{1\le k\le n} \|Te_k\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X,$$

故 T 连续. □

例 2.1.9: 正交投影算子

Hilbert 空间 X 上的正交投影算子. 设 M 是 X 的一个闭线性子空间, 依投影定理 (引理1.6.11),$\forall x \in X$, 存在唯一的分解

$$x = y + z,$$

其中 $y \in M, z \in M^{\perp}$. 对应 $x \mapsto y$ 称作由 X 到 M 的正交投影算子, 记作 P_M. 在不强调子空间 M 时, 我们省略 M 而简记为 P. P 为连续线性算子, 并且当 $M \ne \{0\}$ 时, $\|P\| = 1$.

定理 2.1.10: 线性泛函的有界性与连续性等价

设 X, Y 是赋范空间, T 是从 $D(T) \subset X$ 到 Y 的线性泛函, 则以下四点等价:

(1) T 在 0 处连续;

(2) T 连续;

(3) 存在 $M > 0$ 使得 $\|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in D(T)$.

(4) T 有界.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 设 $x_n, x \in D(T)$, 满足 $x_n \to x$, 则 $x_n - x \to 0$, 由于 T 在 0 处连续, 则 $T(x_n - x) \to 0$, 再由线性性易得 $Tx_n \to Tx$, 从而 T 连续.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 反设存在非零的 $x_n \in D(T)$ 使得

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|, \quad \forall n \ge 1.$$

记 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, 则 $\|y_n\| = 1$ 并且

$$\|Ty_n\| > n \quad \forall n \ge 1,$$

则虽然 $\{y_n\}_1^\infty$ 在 X 中有界, 但 $\{Ty_n\}_1^\infty$ 在 Y 中无界, 矛盾.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 若 $A \subset D(T)$ 在 X 中有界, 则存在 $r>0$ 使得 $A \subset B_X(0,r)$, 从而 $T(A) \subset B_Y(0, rM)$.

(4) $\Longrightarrow$ (1): 反设 T 在 0 处不连续, 则存在非零的 $x_n \in D(T)$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $x_n \to 0$ 但 $\|Tx_n\| > \varepsilon_0 (\forall n)$. 记 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, 则 $\|y_n\| = 1$, 但由 $x_n \to 0$ 知

$$\|Ty_n\| > \frac{\varepsilon_0}{\|x_n\|} \to \infty,$$

此时 $\{y_n\}$ 有界但 $\{Ty_n\}$ 无界, 与有界性矛盾. □

定义 2.1.11: 算子范数

设 X, Y 是赋范空间, $T: D(T) \to Y$ 是有界线性算子. 称

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为 T 的**算子范数**.

☞ 注

不难证明

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in D(T)\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \end{aligned}$$

此外还有

$$\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in D(T).$$

☞ 注

为了方便期间, 此后若无特别说明, 均默认 $D(T) = X$, 这是对结果没有影响的, 因为 $D(T)$ 本身也是一个赋范线性空间 (继承了 X 上的范数).

☞ **注**

用 $L(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 上的有界线性算子全体. 对 $S,T\in L(X,Y),\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 定义

$$(\alpha S+\beta T)(x):=\alpha Sx+\beta Tx,\forall x\in X,$$

则 $\alpha S+\beta T\in L(X,Y)$, 并且 $L(X,Y)$ 依算子范数构成了一个赋范线性空间. 详细的证明留作习题.

特别地, 若 $Y=X$, 则记为 $L(X):=L(X,X)$. 若 $Y=\mathbb{K}$, 则记 $X^*:=L(X,\mathbb{K})$.

☞ **注**

设 $T_n,T\in L(X,Y)$, 则 $T_n\to T$ 即 $\|T_n-T\|\to 0$, 该收敛有时称作一致收敛, 因为下一定理.

定理 2.1.12: 依算子范数收敛

设 X,Y 是赋范空间, $T_n,T\in L(X,Y)$, 则 $\|T_n-T\|\to 0$ 的充要条件为: T_n 在 X 的任一有界集上一致收敛于 T.

证明. 必要性: 设 A 是 X 中的有界集, 则存在 $r>0$ 使得 $A\subset B_X(0,r)$. $\forall\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$\|T_n-T\|<\frac{\varepsilon}{r},\quad \forall n>N.$$

则对 $\forall x\in A,n>N$, 有

$$\|T_nx-Tx\|\le\|T_n-T\|\cdot\|x\|\le r\|T_n-T\|<\varepsilon.$$

充分性: 取有界集为 X 中的单位球面 $S:=\{x\in X:\|x\|=1\}$. 则

$$\|T_n-T\|=\sup_{x\in S}\|T_nx-Tx\|\to 0.$$

□

定理 2.1.13: $L(X,Y)$ 的完备性

设 X 是赋范空间, Y 是 Banach 空间, 则 $L(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

证明. 设 $\{T_n\}$ 是 $L(X,Y)$ 中的 Cauchy 列, 则 $\forall \varepsilon>0$ 存在 $N>0$ 使得

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall n,m>N.$$

$\forall x\in X$, 由 $\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\cdot\|x\|$ 知 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列, 从而存在 $y\in Y$ 使得 $T_n x\to y$. 定义

$$T: X\to Y, Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x (x\in X).$$

任取 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}, x_1,x_2\in X$, 有

$$\begin{aligned}T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\\ &=\alpha_1 \lim_{n\to\infty} T_n(x_1)+\alpha_2 \lim_{n\to\infty} T_n(x_2) = \alpha_1 T x_1+\alpha_2 T x_2.\end{aligned}$$

从而 T 是线性的. 此外, $\forall x\in X$, 有

$$\|Tx\| \le \|Tx - T_n x\| + \|T_n x\|,$$

由于 $\{T_n\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $M>0$ 使得 $\|T_n\|\le M(\forall n\ge 1)$. 则

$$\|Tx\| \le \|Tx - T_n x\| + M\|x\|,$$

令 $n\to\infty$ 可得

$$\|Tx\|\le M\|x\|,$$

即 T 有界, 因此 $T\in L(X,Y)$.

最后证明 $T_n\to T$. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得

$$\|T_m - T_n\| < \varepsilon, \quad \forall m,> N.$$

则对 $m,n>N$, 有

$$\|T_nx-Tx\| \le \|T_nx-T_mx\|+\|T_mx-Tx\| \le \varepsilon\|x\|+\|T_mx-Tx\|,$$

令 $m\to\infty$, 得

$$\|T_nx-Tx\|\le\varepsilon\|x\|,\quad \forall n>N.$$

因此 $\|T_n-T\|\to 0$. □

例 2.1.14: l^p 上的左平移算子

定义 $T_n: l^p\to l^p$, 满足

$$T_nx=(x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots),\quad x=\{x_k\}.$$

由于 $\|T_nx\|\le\|x\|$, 故 $T\in L(l^p)$, 且 $\|T\|\le 1$. 若取 x 为第 n 分量为 1 其余为 0 的点列, 则 $\|x\|=1$ 且 $\|T_nx\|=1$, 因此 $\|T_n\|=1$.

$\forall x\in l^p$, 有 $\|T_nx\|\to 0(n\to\infty)$, 这种收敛叫强收敛, 但有此时 $\|T_n\|=1$.

定义 2.1.15: 强收敛

设 X,Y 是赋范空间, $T_n,T\in L(X,Y)$. 若 $\forall x\in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx-Tx\|=0,$$

则称 $\{T_n\}$**强收敛**于 T, 记作 $T_n\xrightarrow{s}T$, 或 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$(强).

☞ 注

若 $T_n\to T(\|T_n-T\|\to 0)$, 必有 $T_n\xrightarrow{s}T$. 这是因为

$$\|T_nx-Tx\|\le\|T_n-T\|\cdot\|x\|,\quad \forall x\in X.$$

但反之未必成立, 上面的左平移算子就是一个反例.

定义 2.1.16: 有界线性算子的乘法

设 X,Y,Z 是赋范空间, $S\in L(X,Y), T\in L(Y,Z)$, 定义 T 和 S 的**乘积**$T\circ S: X\to Z$ 为

$$T\circ S(x)=T(S(x)),\quad x\in X.$$

则 $TS\in L(X,Z)$.

证明. 由

$$\|TSx\|\le\|T\|\cdot\|Sx\|\le\|T\|\cdot\|S\|\cdot\|x\|,\quad x\in X$$

可得. □

定理 2.1.17

设 $T\in L(X)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\ge1}\left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}.$$

证明. 首先, 由

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}\ge\inf_{n\ge1}\left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}:=r$$

可知只需证明 $\limsup_{n\to\infty}\le r$. 由下确界定义知 ($r$ 显然是有限的, 因为 $r\le\|T\|$), $\forall\varepsilon>0$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left\|T^m\right\|^{\frac{1}{m}}<r+\varepsilon.$$

当 $n>m$ 时令 $n=km+q_n$, 其中 $0\le q_n<m$, 则

$$\begin{aligned}\left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}=&\left\|T^{km+q_n}\right\|^{\frac{1}{n}}\le\left\|T^m\right\|^{\frac{k}{n}}\cdot\|T\|^{\frac{q_n}{n}}\\ \le&(r+\varepsilon)^{\frac{mk}{n}}\cdot\|T\|^{\frac{q_n}{n}},\end{aligned}$$

在上式中对 n 取上极限可得 $\limsup_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\le r$, 证毕. □

2.1.1 作业

✍ **题目2.1.1.** 设 $A\in L(X,Y)$, 求证:

(1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$; (2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|$.

解答. (1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|A\|\cdot\|x\| = \|A\|$.

(2) 任取 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\|x\| = 1$ 满足 $\|A\| - \delta \le \|Ax\| \le \|A\|$, 其中 $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|+1-\varepsilon}$, 从而 $y = \frac{x}{1+\delta}$ 满足 $\|y\| < 1$ 并且

$$\|Ay\| = \frac{\|Ax\|}{1+\delta} \ge \frac{\|A\| - \delta}{1+\delta} = \|A\| - \varepsilon.$$

✍ **题目2.1.2.** 设 $f \in L(X, \mathbb{R})$, 求证:

(1) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} f(x)$; (2) $\sup\limits_{\|x\|<\delta} f(x) = \delta\|f\|, \quad \forall \delta > 0$.

解答. (1) 只需注意到 $\forall x \in X$, $f(\mathrm{sign}(\overline{f(x)})x) = \mathrm{sign}(\overline{f(x)}) f(x) = |f(x)|$.

(2) 结合 (1) 和上题 (2) 易得.

✍ **题目2.1.3.** 设 $y(t) \in C[0,1]$, 定义 $C[0,1]$ 上的泛函

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in C[0,1],$$

求 $\|f\|$.

解答.

$$\|f(x)\| \le \left(\int_0^1 |y(t)|\mathrm{d}t\right)\|x\| \Longrightarrow \|f\| \le \int_0^1 |y(t)|\mathrm{d}t,$$
$$f(\overline{\mathrm{sign}(y)}) = \int_0^1 |y(t)|\mathrm{d}t \Longrightarrow \|f\| \ge \int_0^1 |y(t)|\mathrm{d}t.$$

✍ **题目2.1.4.** 设 f 是 X 上的非零有界线性泛函, 令

$$d = \inf\{\|x\| : f(x) = 1, x \in X\},$$

求证: $\|f\| = \frac{1}{d}$.

解答. 若 $d = 0$, 则存在 x_n 满足 $f(x_n) = 1$ 且 $\|x_n\| \to 0$, 由 f 的连续性知这是不可能

的, 因此 $d>0$. 任取 x 满足 $f(x)=1$, 有

$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|=\frac{1}{\|x\|}\le\frac{1}{d}\Longrightarrow\|f\|\le d.$$

取 y_n 满足 $f(y_n)=1$ 并且

$$d\le\|y_n\|\le d+\frac{1}{n},$$

从而

$$f\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)=\frac{1}{\|y_n\|}\ge\frac{1}{d+\frac{1}{n}},$$

由 n 的任意性, $\|f\|\ge\frac{1}{d}$.

✍ **题目2.1.5.** 设 $f\in X^*$, 求证: $\forall\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in X$, 使得 $f(x_0)=\|f\|$, 且 $\|x_0\|<1+\varepsilon$.

解答. 取 x 满足 $\|x\|=1$ 且

$$\|f\|-\delta<f(x)\le\|f\|,$$

其中 $\delta=\frac{\|f\|\varepsilon}{1+\varepsilon}$. 令 $x_0=\frac{\|f\|}{f(x)}x$, 则

$$f(x_0)=\|f\|,\quad\|x_0\|=\frac{\|f\|}{f(x)}<\frac{\|f\|}{\|f\|-\delta}=1+\varepsilon.$$

✍ **题目2.1.6.** 设 $T:X\to Y$ 是线性的, 令

$$N(T)\triangleq\{x\in X:Tx=0\}.$$

(1) 若 $T\in L(X,Y)$, 求证: $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 问 $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间能否推出 $T\in L(X,Y)$?

(3) 若 f 是线性泛函, 求证

$$f\in X^*\Longleftrightarrow N(f)\text{ 是闭线性子空间.}$$

解答. (1) 设 $\{x_n\}\subset N(T)$, $x_n\to x_0$, 则根据连续性以及 $Tx_n=0$ 得 $Tx_0=0, x_0\in N(T)$.

(2) 不能. 取赋范空间为 $(l^1,\|\cdot\|_\infty)$. 记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, $x=\{x_n\}$, $a=(1,-1,0,0,\cdots)$.

又记

$$Tx = x - af(x).$$

f 显然是无界的, 因为 $f(x^{(m)}) = m$, 其中 $x_n^{(m)} = 1(n \leq m), x_n^{(m)} = 0(n > m)$.

下面证明 $N(T)$ 是闭线性子空间, 但 T 不是连续的.

先证 $N(T)$ 是闭线性子空间. 事实上若 $Tx = 0$, 则由 $a_n = 0(n > 2)$ 知 $x_n = (Tx)_n = 0(n > 2)$. 并且 $(Tx)_1 = x_1 - a_1 f(x) = -x_2 = 0, (Tx)_2 = x_2 - a_2 f(x) = x_1 = 0$, 故 $x = 0$. 从而 $N(T) = \{0\}$, 为闭线性子空间.

再证 T 不是连续的. 为此, 反设 T 有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $\|Tx\|_\infty \leq M\|x\|_\infty$, 从而

$$\left|f(x)\right| - 1 \leq \max\left\{\left|x_1 - f(x)\right|, \left|x_2 + f(x)\right|\right\} \leq 1, \forall x = \{x_n\} \in l^1, \|x\|_\infty = 1.$$

但 f 是无界的矛盾.

(3) 只需证明充分性. 若 f 无界, 则存在 $\|x_n\| = 1$ 并且 $f(x_n) > n$. 令

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x_1}{f(x_1)},$$

则 $y_n \in N(f)$, 并且 $y_n \to -\frac{x_1}{f(x_1)} \notin N(f)$, 矛盾.

2.2 Riesz 表示定理

在 Hilbert 空间中, $(\cdot, y)$ 可以定义一个有界线性泛函, 过程如下:

设 X 是 Hilbert 空间, 任取 $y \in X$, 定义

$$f_y(x) := (x, y), \quad x \in X.$$

由于

$$\left|f_y(x) = \left|(x, y)\right|\right| \leq \|x\| \cdot \|y\| \implies \|f_y\| \leq \|y\|,$$

并且

$$\|f_y\| \geq \left|f_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \|y\|,$$

因此 $f_y \in X^*$ 并且 $\|f_y\| = \|y\|$.

定理 2.2.1: Riesz 表示定理

设 X 是 Hilbert 空间, $f \in X^*$. 则存在唯一的 $u \in X$ 使得

$$f(x) = (x, u), \forall x \in X \quad 且 \quad \|f\| = \|u\|.$$

反之, $(\cdot, u)$ 定义了一个有界线性泛函 f_u 满足 $\|f_u\| = \|u\|$.

证明. 不妨设 $f \neq 0$, 则 $Ker f$ 是 X 的真闭子空间. 则 $(\mathrm{Ker} f)^\perp \neq \{0\}$. 取 $x_0 \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$ 且 $\|x_0\| = 1, f(x_0) \neq 0$. 任取 $x \in X$, 有

$$x = \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 + \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \right) \in (\mathrm{Ker} f)^\perp + \mathrm{Ker} f.$$

则 $(x, x_0) = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. 也即

$$f(x) = (x, \overline{f(x_0)} x_0), \quad \forall x \in X.$$

令 $u := \overline{f(x_0)} x_0$, 则 $f(x) = (x, u), x \in X$, 并且 $\|f\| = \|u\|$.

下面证明唯一性. 若还存在 $u' \in X$ 使得 $f(x) = (x, u'), \forall x \in X$, 则 $(x, u - u') = 0, \forall x \in X$, 从而 $u = u'$. □

定理 2.2.2

设 X 是 Hilbert 空间, $a(x, y)$ 是 X 上的共轭双线性函数 (关于 x 线性, 关于 y 共轭线性), 且存在 $M > 0$ 使得

$$|a(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

则存在唯一的 $A \in L(X)$ 使得 $a(x, y) = (x, Ay), \forall x, y \in X$. 并且

$$\|A\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|a(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

证明. $\forall y\in X$, $a(\cdot,y)$ 定义了 X 上的一个有界线性泛函:

$$f_y(x):=a(x,y),\quad x,y\in X.$$

则由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $u_y\in X$ 使得

$$f_y(x)=a(x,y)=(x,u_y)\quad 且\quad \|f_y\|=\|u_y\|.$$

令 $A:X\to X, y\mapsto u_y$. 任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $y_1,y_2\in X$, 有

$$\begin{aligned}&(x,A(\alpha y_1+\beta y_2))=a(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\overline{\alpha}a(x,y_1)+\overline{\beta}a(x,y_2)\\=&\overline{\alpha}(x,Ay_1)+\overline{\beta}(x,Ay_2)=(x,\alpha Ay_1+\beta Ay_2),\quad \forall x\in X,\end{aligned}$$

则 $A(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha Ay_1+\beta Ay_2$, A 是线性算子. 此外, 对 $y\in X$, 有

$$\|Ay\|=\|u_y\|=\|f_y\|=\sup_{x\neq0}\frac{|f_y(x)|}{\|x\|}=\sup_{x\neq0}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|}\leq M\|y\|,$$

因此 $A\in L(X)$. A 的唯一性是显然的. $\|A\|$ 的表达式从上式不难看出. □

2.3 开映射定理及其推论

2.3.1 开映射定理

定理 2.3.1: 开映射定理

设 X 和 Y 都是 Banach 空间, $T\in L(X,Y)$. 若 $T(X)$ 是 Y 中的第二纲集, 则存在 $c>0$ 使得

$$B_Y(0,c)\subset TB_X(0,1).$$

证明. 由

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_X(0,n),\quad TX=\bigcup_{n=1}^{\infty}TB_X(0,n)$$

以及 $T(X)$ 是第二纲集知, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\overline{B_X(0,n_0)}$ 包含内点, 记为 y_0. 故存在 $\delta > 0$ 使得

$$B_Y(y_0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,n_0)}.$$

由于 $\overline{TB_X(0,n_0)}$ 是对称的, 因此还有 $y_0 \in \overline{TB_X(0,n_0)}$. 则

$$B_Y(0,\delta) = -y_0 + B_Y(y_0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,n_0)} + \overline{TB_X(0,n_0)} \subset \overline{TB_X(0,2n_0)}.$$

从而

$$B_Y(0,\frac{\delta}{2n_0}) \subset \overline{TB_X(0,1)}.$$

记 $r := \frac{\delta}{2n_0}$, 有 $B_Y(0,r) \subset \overline{TB_X(0,1)}$. 取 $c := \frac{r}{3}$, 下面证明

$$B_Y(0,\frac{r}{3}) \subset TB_X(0,1).$$

由于 $B_Y(0,r) \subset \overline{TB_X(0,1)}$, 则 $\forall n \geq 1$,

$$B_Y(0,3^{-n}r) \subset \overline{TB_X(0,3^{-n})}.$$

任取 $y \in B_Y(0\frac{r}{3})$. 由于 $B_Y(0,\frac{r}{3}) \subset \overline{TB_X(0,1)}$, 存在 $x_1 \in B_X(0,\frac{1}{3})$ 使得

$$\|T - Tx_1\| < \frac{r}{3^2}.$$

上式即 $y - Tx_1 \in B_Y(0,\frac{r}{3^2})$. 由于 $B_Y(0,\frac{r}{3^2}) \subset \overline{TB_X(0,\frac{1}{3^2})}$, 则存在 $x_2 \in B_X(0,\frac{1}{3^2})$ 使得

$$\left\|y - Tx_1 - Tx_2\right\| < \frac{r}{3^3}.$$

上式即 $y - Tx_1 - Tx_2 \in B_Y(0,\frac{r}{3^3})$. 以此类推, 存在 $x_k \in B_X(0,3^{-k})$ 使得

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{k} Tx_i\right\| = \left\|y - T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right\| < \frac{r}{3^{k+1}}.$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|x_i\| \le \sum\limits_{i=1}^{n} 3^{-i} = \frac{1}{2} < 1$, 并且 X 是 Banach 空间, 存在 $x \in B_X(0,1)$ 使得

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

在 $\left\| y - T\left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right)\right\| < \frac{r}{3^k}$ 中令 $k \to \infty$ 可得 $y = Tx$, 从而 $y \in TB_X(0,1)$. □

☞ 注

该定理还可以推出 $T(X) = Y$, 即 T 是满射, 这是因为

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_Y(0,n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} TB_X(0, \frac{n}{c}) = TX.$$

推论 2.3.2

设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$, 则要么 $R(T) = Y$, 要么 $R(T)$ 是 Y 中的第一纲集.

定理 2.3.3

设 X 和 Y 都是 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$. 若 $T(X)$ 是 Y 中的第二纲集, 则 T 是开映射 (T 将 X 中的开集映为 Y 中的开集).

证明. 设 U 是 X 中的开集, 对 $\forall x \in U$, 下证 Tx 是 TU 的内点. 由于 U 是开集, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$B_X(x,\delta) \subset U.$$

由上一定理, 存在 $c > 0$ 使得 $B_Y(0,c) \subset TB(0,1)$, 从而

$$B_Y(Tx,\delta c) = Tx + \delta B_Y(0,c\delta) \subset Tx + TB_X(0,\delta) = TB_X(x,\delta) \subset TU.$$

□

定理 2.3.4: Banach 逆算子定理

设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 且 T 是双射, 则 $T^{-1} \in L(Y,X)$,.

证明. 由于

$$B_Y(0,c) \subset TB_X(0,1),$$

则

$$T^{-1}B_Y(0,1) \subset B_X(0,c^{-1}),$$

上式即 $\|T^{-1}\| \le c^{-1}$. □

定理 2.3.5: 等价模定理

设 X 是线性空间, 其上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 使得 X 关于这两个范数都是 *Banach* 空间. 若 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则这两个范数等价.

证明. 由于 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则存在 $M>0$ 使得

$$\|x\|_1 \le M\|x\|_2, \quad \forall x \in X.$$

则单位映射 $I:(X,\|\cdot\|_2) \to (X,\|\cdot\|_1)$ 是有界线性算子, 并且是满射. 由 Banach 逆算子定理, $I^{-1}:(X,\|\cdot\|_1) \to (X,\|\cdot\|_2)$ 是有界线性算子, 从而存在 $M'>0$ 使得

$$\|x\|_2 \le \|x\|_2, \quad x \in X,$$

故两个范数等价. □

2.3.2 闭图像定理

定义 2.3.6: 乘积空间

设 X 与 Y 是赋范空间, 令

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\},$$

在其上定义范数

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|, \quad (x,y) \in X \times Y,$$

则称 $X\times Y$ 为 X 与 Y 的**乘积空间**.

定义 2.3.7: 线性算子的图像与闭算子

设 X,Y 是赋范空间, $T:D(T)\to Y$ 是线性算子, 称

$$G_T := \{(x,Tx): x\in D(T)\}$$

为 T 的**图像**(Graph).

若 G_T 在 $X\times Y$ 中闭, 则称 T 是**闭线性算子**.

☞ **注**

G_T **是** $X\times Y$ **的线性子空间**.

定理 2.3.8: 闭算子等价定义

设 X,Y 是赋范空间, $T:D(T)\to Y$ 是线性算子, 则 T 是闭算子的充要条件为: $\forall\{x_n\}\subset D(T)$, 若 $x_n\to x, Tx_n\to y$, 都有 $x\in D(T)$ 以及 $y=Tx$.

证明. 该充要条件就是闭算子定义的等价论述. □

定理 2.3.9: 闭图像定理

设 X,Y 是 *Banach* 空间, T 是从 X 到 Y 的闭算子, 则 $T\in L(X,Y)$.

证明. 由于 X 与 Y 都是 Banach 空间, 因此 $X\times Y$ 也是 Banach 空间, 而 G_T 是 $X\times Y$ 的闭子空间, 因此 G_T 本身还是 Banach 空间. 令 $T_x: G_T\to X$,

$$T_1(x,Tx)=x,\quad \forall (x,Tx)\in G_T.$$

则不难验证 T_1 是线性有界双射. 由 Banach 逆算子定理, $T_1^{-1}\in L(X,G_T)$. 从而对 $x\in X$, 有

$$\|Tx\|\le\|(x,Tx)\|\le\left\|T_1^{-1}\right\|\cdot\|x\|,$$

因此 $T\in L(X,Y)$. □

☞ **注**

若 $D(T) \neq X$, **则** T **不一定有界**.

例 2.3.10: 无界闭算子

设 $X = Y = C[0,2\pi]$. 记

$$T := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C^1[0,2\pi] \subset X \to Y.$$

若 $x_n \in C^1[0,2\pi]$, 且 $x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y$, 则 x_n 一致收敛于 x, x_n' 一致收敛于 y, 根据数学分析知识不难得到 x 连续可导并且 $y = x'$, 此即 $x =\in D(T)$ 且 $y = Tx$. 从而 T 是闭算子.

但是 T 不是有界的, 因为若取 $x_n(t) = \sin nt$, 则 $\|x_n\| = 1$, 但是

$$\|Tx_n\| = n\|\cos nt\| = n \to \infty.$$

2.3.3　共鸣定理

定理 2.3.11: 共鸣定理——一致有界定理

设 X 是 *Banach* 空间, Y 是赋范空间, $W \subset L(X,Y)$. 若

$$\sup_{A\in W} \|Ax\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

则 $\sup\limits_{A\in W} \|A\| < \infty$.

证明. 方法一 (等价模定理). 在 X 上定义范数

$$\|x\|_W = \|x\| + \sup_{A\in W} \|Ax\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_W$ 比 $\|\cdot\|$ 强, 只需证明 $(X, \|\cdot\|_W)$ 构成 Banach 空间, 根据等价模定理就能得到结果.

设 $\|x_n - x_m\|_W \to 0(m,n \to \infty)$, 则 $\|x_n - x_m\| \to \infty(m,n \to \infty)$, 因此由 X 是 Banach 空间, 存在 $x\in X$ 使得 $\|x-x_n\|\to 0$. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$\sup_{A\in W}\|A(x_m-x_n)\|\le\|x_m-x_n\|_W<\varepsilon,\quad \forall m,n>N.$$

从而

$$\|A(x-x_n)\|=\lim_{m\to\infty}\|A(x_m-x_n)\|\le\varepsilon,\quad \forall A\in W,n>N.$$

因此 $(X,\|\cdot\|_W)$ 的确是 Banach 空间.

方法二 (Baire 纲定理). 记

$$E_n=\{x\in X:\|Ax\|\le n,\forall A\in W\},\quad n\ge 1,$$

显然每个 E_n 都是闭集, 并且 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 由 Baire 纲定理及 X 的完备性, 必存在某个 E_n 不是疏集, 也即 E_n 有内点 x_0 使得 $B(x_0,\delta)\subset E_n$. 由于每个 A 都是线性的, 不难看出 E_n 是对称的凸集, 从而 $B(-x_0,\delta)\subset E_n$ 并且 $B(0,\delta)=\frac{1}{2}B(x_0,\delta)+\frac{1}{2}B(-x_0,\delta)\subset E_n$, 即

$$\|Ax\|\le n,\quad \forall A\in W,\quad \forall\|x\|<\delta.$$

因此对任意的 $x\in X$ 且 $x\ne 0$,

$$\left\|A\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\|\le n\Longrightarrow\|Ax\|\le\frac{2n}{\delta}\|x\|,\quad \forall A\in W,$$

从而 $\sup_{A\in W}\|A\|\le\frac{2n}{\delta}<\infty$. □

定理 2.3.12

设 X,Y 是 Banach 空间, $T_n\in L(X,Y)$. 则 $\{T_n\}$ 强收敛的充要条件是:

(1) $\sup_{n\ge1}\|T_n\|<\infty$;

(2) 存在 X 的稠密子集 G 使得 $\lim_{n\to\infty}T_nx$ 存在 $(\forall x\in G)$.

证明. 必要性: 若 T_n 强收敛于 $T\in L(X,Y)$, 则由 $T_nx\to Tx(\forall x\in X)$ 时对每个 $x\in X$, $\sup_{n\ge1}\|T_nx\|<\infty$, 根据共鸣定理 $\sup_{n\ge1}\|A_n\|<\infty$. (2) 显然.

充分性: 记 (1) 中的上界为 M. 首先证明 $\{T_n x\}(x \in X)$ 是 Y 中的 Cauchy 列. 对任意的 $x \in X$ 以及 $\varepsilon > 0$, 取 $x' \in G$ 使得 $\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. 由 (2) 知 $\{T_n x'\}$ 是 Cauchy 列, 则存在 $N > 0$ 使得

$$\|T_n x' - T_m x'\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m, n > N.$$

从而对 $m, n > N$, 有

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n(x - x')\| + \|T_n x' - T_m x'\| + \|T_m(x' - x)\| \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

因此 $\{T_n x\}(x \in X)$ 是 Y 中 Cauchy 列. 由 Y 的完备性, $\{T_n x\}$ 收敛, 记其极限为 Tx. 则不难验证 $T \in L(X, Y)$ 且 T_n 强收敛于 T. □

注

该定理只有必要性的证明使用了 X 的完备性, 证明充分性只需 X 是赋范空间即可.

注

在定理条件下, 若 T_n 强收敛于 $T \in L(X, Y)$, 则

$$\|T\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|.$$

证明. 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon \in X$ 满足 $\|x_\varepsilon\| = 1$ 并且

$$\|T\| \leq \|T x_\varepsilon\| + \varepsilon.$$

由 $T_n x_\varepsilon \to T x_\varepsilon$ 可知存在 N 使得

$$\|T_n x_\varepsilon - T x_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

故对 $n > N$, 有

$$\|Tx\| \le \|T_n x_\varepsilon\| + \|Tx_\varepsilon - T_n x_\varepsilon\| + \varepsilon \le \|T_n\| + 2\varepsilon,$$

在上式中对 n 取下极限即可. □

定理 2.3.13

设 X, Y 是 Banach 空间, $\{T_n\} \subset L(X,Y)$ 且 $\forall x \in X$. 若 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列, 则存在 $T \in L(X,Y)$ 使得 $T_n x \to Tx (\forall x \in X)$.

证明. 由于 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故

$$\sup_{n\ge 1} \|T_n x\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

根据共鸣定理可得, $\sup\limits_{n\ge 1} \|T_n\| < \infty$. 再由上一定理知, 存在 $T \in L(X,Y)$ 使得 T_n 强收敛于 T. □

2.3.4 应用

定理 2.3.14: Lax-Milgram 定理

设 X 是 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的共轭双线性函数, 满足:

(1) 有界性: 存在 $M > 0$ 使得

$$|a(x,y)| \le M\|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in X;$$

(2) 强制性: 存在 $\delta > 0$ 使得

$$a(x,x) \ge \delta \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

则存在唯一的具有有界逆的有界线性算子 A 满足

$$a(x,y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in X,$$

并且 $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$.

证明. 由定理2.2.2, 存在唯一的有界线性算子 A 满足

$$a(x,y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in X.$$

若 $y \in X$ 使得 $Ay = 0$, 则 $a(y,y) = (y, Ay) = 0 \ge \delta\|y\| \implies y = 0$, 因此 A 是单射.

下面证明 $R(A)$ 是 X 的闭子空间. 设 $Ay_n \to z$, 则由

$$\begin{aligned} \delta\|y_m - y_n\|^2 &\le a(y_m - y_n, y_m - y_n) = (y_m - y_n, A(y_m - y_n)) \\ &\le \|Ay_m - Ay_n\| \cdot \|y_m - y_n\| \end{aligned}$$

知 $\delta\|y_m - y_n\| \le \|Ay_m - Ay_n\|$, 从而 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列. 根据 X 的完备性, $y_n \to y$, 从而 $z = Ay \in R(A)$, $R(A)$ 是闭的.

接下来证明 A 是满射. 由于 $R(A)$ 是闭子空间, 只需证明 $R(A)^{\perp} = \{0\}$. 设 $x \perp R(A)$, 则 $x \perp Ax$, 从而

$$0 = (x, Ax) = a(x,x) \ge \delta\|x\|^2,$$

故 $x = 0$, A 是满射.

由 Banach 逆算子定理以及 $A \in L(X)$ 是线性双射可知 A 存在有界逆. 在

$$\delta\|x\|^2 \le a(x,x) = (x, Ax) \le \|x\| \cdot \|Ax\|$$

中令 $x = A^{-1}y$ 可得

$$\delta\|A^{-1}y\| \le \|y\|, \quad \forall y \in X,$$

此即 $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$. □

定理 2.3.15: Lax 等价定理

设 X, Y 为 Banach 空间, $T_n, T \in L(X,Y)$ 均为双射, 且 $T_n \to T$ (强收敛). 则

$$T_n^{-1} \to T^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{n\geq 1} \|T_n^{-1}\| < \infty.$$

证明. 由 Banach 逆算子定理, $T_n^{-1}, T^{-1} \in L(Y,X)$.

必要性: 由共鸣定理不难得到.

充分性: 设 $\|T_n^{-1}\| \leq M(\forall n \geq 1)$. 则 $\forall x \in X$, 记 $y = T^{-1}x$, 则

$$\begin{aligned} \|T_n^{-1}x - T^{-1}x\| &= \|T_n^{-1}x - T_n^{-1}(T_nT^{-1}x)\| \\ &\leq \sup_{n\geq 1}\|T_n^{-1}\| \cdot \|x - T_nT^{-1}x\| \leq M\|Ty - T_ny\| \to 0, \end{aligned}$$

因此 $T_n^{-1} \to T^{-1}$. □

2.3.5 作业

✍ **题目2.3.1.** 设 X 是 Banach 空间, X_0 是 X 的闭子空间. 映射 $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为

$$\varphi : x \mapsto [x], \quad \forall x \in X.$$

求证 φ 是开映射.

解答. 显然 $\|\varphi(x)\| = \|[x]\|_0 \leq \|x\|$ 且 φ 是满射, X/X_0 完备, 因此由开映射定理 φ 是开映射.

✍ **题目2.3.2.** 设 X, Y 是 Banach 空间, 方程 $Ux = y$ 对 $\forall y \in Y$ 有解 $x \in X$, 其中 $U \in L(X,Y)$, 并且存在 $m > 0$ 使得

$$\|Ux\| \geq m\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

求证: U 有连续逆 U^{-1} 并且 $\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

解答. U 显然是满射, 并且若 $Ux = Uy$, 则 $m\|x-y\| \leq \|Ux - Uy\| = 0 \implies x = y$, 因此

U 是双射. 在 $\|Ux\| \geq m\|x\|$ 中取 $y = Ux$ 即得到

$$\left\|U^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{m}\|y\|, \quad \forall y \in Y,$$

因此 U^{-1} 连续且 $\left\|U^{-1}\right\| \leq \frac{1}{m}$.

✍ **题目2.3.3.** 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$, 并且存在 $m > 0$ 使得

$$|(Ax, x)| \geq m\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

求证: 存在 $A^{-1} \in L(H)$.

解答. 取 $a(x, y) = (x, Ay)$ 为共轭双线性函数, 满足

$$\left|a(x, y)\right| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \left\|y\right\|, \quad \forall x, y \in H,$$

由 Lax-Milgram 定理, 存在 $A^{-1} \in L(H)$.

✍ **题目2.3.4.** 设 X, Y 是赋范空间, D 是 X 的子空间, 并且 $A : D \to Y$ 是线性映射. 求证:

(1) 如果 A 连续且 D 是闭的, 那么 A 是闭算子;

(2) 如果 A 连续且是闭算子, 那么 Y 完备蕴含 D 闭;

(3) 如果 A 是单射的闭算子, 那么 A^{-1} 也是闭算子;

(4) 如果 X 完备, A 是单射的闭算子, $R(A)$ 在 Y 中稠密, 并且 A^{-1} 连续, 那么 $R(A) = Y$.

解答. (1) 设 $D \ni x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$, 则由 D 是闭集知 $x \in D$, 由 T 的连续性知 $Tx_n \to Tx = y$, 故 A 是闭算子.

(2) 设 $D \ni x_n \to x$, 由 T 连续知 Tx_n 为 Y 中 Cauchy 列, 因此收敛于 $y \in Y$, 而 T 还是闭算子, 因此 $x \in D$, D 为闭集.

(3) 设 $A(D) \ni Ax_n \to y$ 并且 $A^{-1}(Ax_n) \to x \in X$, 则 $D \ni x_n \to x$ 且 $Ax_n \to y$, 由闭算子定义, $x \in D, y = Ax$, 因此 $y \in A(D), x = A^{-1}y$, A^{-1} 也是闭算子.

(4) 由于 A 是单射的闭算子, 因此由 (3)A^{-1} 也是闭算子. 而 A^{-1} 还是连续的, 由 (2), $R(A) = \overline{R(A)} = Y$.

✍ **题目2.3.5.** 用等价范数定理证明: $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 不是 Banach 空间, 其中 $\left\|f\right\|_1 = \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t, \forall f \in$

$C[0,1]$.

解答. 反设 $C[0,1]$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 构成 Banach 空间, 而其关于 $\|\cdot\|_\infty$ 也构成 Banach 空间, 并且 $\|\cdot\|_\infty$ 显然比 $\|\cdot\|_1$ 强, 因此由等价范数定理这两个范数等价, 但是

$$\left\|(1-nx)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\right\|_\infty = n, \quad \left\|(1-nx)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\right\|_1 = \frac{1}{2},$$

矛盾.

✍ **题目2.3.6.** (Gelfand 引理) 设 X 是 Banach 空间, $p: X \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in X$;

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall \lambda > 0, x \in X$;

(3) $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X$;

(4) $x_n \to x \Longrightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} p(x_n) \geq p(x)$.

求证: 存在 $M > 0$ 使得 $p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in X$.

解答.

方法一.(等价模定理) 注意到

$$p(\alpha x) \leq p(\operatorname{Re}\alpha x) + p(\operatorname{Im}\alpha i x) \leq \max\{p(\pm x) + p(\pm i x)\}, \quad \forall x \in X, |\alpha| = 1,$$

因此可以定义范数

$$\|x\|_p = \|x\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x), \quad \forall x \in X.$$

由等价模定理, 只需证明 X 关于 $\|\cdot\|_p$ 完备. 设 $\{x_n\}$ 是 X 上关于 $\|\cdot\|_p$ 的 Cauchy 列. 由于 $\|\cdot\|_p$ 比 $\|\cdot\|$ 强, 因此 $\{x_n\}$ 也是 $\|\cdot\|$ 的 Cauchy 列, 再根据 X 的完备性, $\{x_n\}$ 收敛于 x. 从而

$$\left|p(x) - p(x_n)\right| \leq p(x - x_n) \leq \liminf_{m\to\infty} p(x_m - x_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

因此 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|_p$ 收敛于 x.

方法二.(Baire 纲定理) 记

$$E_n = \{x \in X : p(x) \leq n \quad 且 \quad p(-x) \leq n\},$$

则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 设 $x_n\to x$, 则

$$\begin{cases} p(x)\le \liminf\limits_{n\to\infty} p(x_n)\le n \\ p(-x)\le \liminf\limits_{n\to\infty} p(-x_n)\le n \end{cases} \Longrightarrow x\in E_n,$$

故每个 E_n 都是闭集. 由 Baire 纲定理及 X 的完备性, 存在 E_n 不是疏集, 即存在 $B(x_0,r)\subset E_n$. 根据 E_n 的定义, $B(-x_0,r)\subset E_n$, 而 E_n 显然还是一个凸集, 因此 $B(0,r)=\frac{1}{2}B(x_0,r)+\frac{1}{2}B(-x_0,r)\subset E_n$. 任取 $x\neq 0$, 有

$$p\left(\frac{rx}{2\|x\|}\right)\le n \Longrightarrow p(x)\le \frac{2n}{r}\|x\|,$$

取 $M=\frac{2n}{r}$ 即可.

✍ **题目2.3.7.** 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $\{A_n\}\subset L(X,Y)$. 又对 $\forall x\in X$, $\{A_nx\}$ 在 Y 中收敛. 求证: 存在 $A\in L(X,Y)$ 使得

$$A_nx\to Ax,\quad \forall x\in X \quad 并且\quad \|A\|\le \liminf_{n\to\infty}\|A_n\|.$$

解答. 记 $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx(\forall x\in X)$ 为线性算子. 由于 A_nx 收敛, 因此 $\sup\limits_{n\ge1}\|A_nx\|<\infty(\forall x\in X)$, 由共鸣定理, $\liminf\limits_{n\to\infty}\|A_n\|\le\sup\limits_{n\ge1}\|A_n\|<\infty$. 从而

$$\|Ax\|=\lim_{n\to\infty}\|A_nx\|\le\liminf_{n\to\infty}\|A_n\|\cdot\|x\|,\quad \forall x\in X.$$

✍ **题目2.3.8.** 设 $1<p<\infty$ 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x=\{x_k\}\in l^p$ 保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kx_k$ 收敛. 求证: $\{\alpha_k\}\in l^q$. 又若 $f:x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kx_k$, 求证: f 作为 l^p 上的线性泛函, 有

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

解答. 记 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_kx_k\in(l^p)^*$. 由于对每个 $x\in l^p$, $f_n(x)\to f(x)$, 因此 $\sup\limits_{n\ge1}\left|f_n(x)\right|<\infty$, 根据共鸣定理, 存在 $M>0$ 使得 $\left\|f_n\right\|\le M(\forall n\ge1)$.

又记 x 满足 $x_k=\operatorname{sign}(\overline{\alpha}_k)|\alpha|^{q-1}(\forall k\geq 1)$, $x^{(n)}\in l^p$ 为前 n 项与 x 相等, 其余项均为 0 的点. 因此

$$f(x^{(n)})=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q=f_n(x^{(n)})\leq M\left\|x^{(n)}\right\|_p=M\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

整理得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq M,\quad \forall n\geq 1,$$

令 $n\to\infty$ 即得到 $\alpha\in l^q$. 由

$$f(x)=\|\alpha\|_q^q=\|\alpha\|_q\cdot\|x\|_p,\quad \left|f(y)\right|\leq\|\alpha\|_q\cdot\left\|y\right\|_p,\quad \forall y\in l^p$$

得 $\left\|f\right\|=\|\alpha\|_q$.

✍ **题目2.3.9.** 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 对 $\forall x=\{x_k\}\in l^1$, 保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\}\in l^\infty$. 又若 $f:x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$ 作为 l^1 上的线性泛函, 求证:

$$\left\|f\right\|=\sup_{k\geq 1}|\alpha_k|.$$

解答. 记 $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\in(l^1)^*$. 由于对每个 $x\in l^1$, $f_n(x)\to f(x)$, 因此 $\sup\limits_{n\geq 1}\left|f_n(x)\right|<\infty$, 根据共鸣定理, 存在 $M>0$ 使得 $\left\|f_n\right\|\leq M(\forall n\geq 1)$.

又记 $e^{(n)}$ 为第 n 项为 1 其余均为 0 的点, 因此

$$\left|f(e^{(n)})\right|=|\alpha_n|=f_n(e^{(n)})\leq M\left\|e^{(n)}\right\|_1=M,\quad \forall n\geq 1,$$

在上式左侧对 n 取上界得 $\alpha\in l^\infty$. 再由

$$\left|f(x)\right|\leq\|\alpha\|_\infty\cdot\|x\|_1,\quad \forall x\in l^1,$$

以及存在 $\{n_k\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\left|\alpha_{n_k}\right|=\|\alpha\|_\infty \Longrightarrow \left|f(\alpha_{n_k}e_{n_k})\right|\to\|\alpha\|_\infty^2,$$

知 $\|f\|=\|\alpha\|_\infty$.

✍ **题目2.3.10.** 用 Gelfand 引理证明共鸣定理.

解答. 设 X 为 Banach 空间, Y 为赋范空间, $W\subset L(X,Y)$ 满足

$$\sup_{A\in W}\|Ax\|<\infty,\quad \forall x\in X.$$

令 $p(x)=\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|$, 则 p 显然满足 Gelfand 引理的条件 (1)(2)(3). 对 (4), 反设存在 $x_n\to x_0$ 但 $p(x_0)>\alpha>\liminf\limits_{n\to\infty}p(x_n)$. 由下极限定义, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{y_n\}$ 使得

$$p(x_0)>\alpha\ge p(y_n),\quad \forall n\ge 1.$$

因为 $p(x_0)>\alpha$, 存在 $A_0\in W$ 使得 $\|A_0x_0\|>\alpha$, 从而

$$\|A_0x_0\|>\alpha\ge p(y_n)\ge\left\|A_0y_n\right\|,\quad \forall n\ge 1,$$

在上式中令 $n\to\infty$, 得到 $\|A_0x_0\|>\alpha\ge\|A_0x_0\|$, 矛盾. 因此 p 满足 Gelfand 引理所有条件, 故存在 $M>0$ 使得 $p(x)\le M\|x\|,\forall x\in X \Longrightarrow \|A\|\le M,\forall A\in W$.

✍ **题目2.3.11.** 设 X,Y 是 Banach 空间, $A\in L(X,Y)$ 是满射. 求证: 如果在 Y 中 $y_n\to y_0$, 则存在 $C>0$ 与 $x_n\to x_0$ 使得 $Ax_n=y_n$ 并且 $\|x_n\|\le C\left\|y_n\right\|$.

解答. 记 $N(A)=\{x\in X:Ax=0\}$ 为闭子空间, $T:X/N(A)\to Y,[x]\to Ax$, 是良定义的双射, 因为 $[x]=[y]\iff[x-y]=N(A)\iff x-y\in N(A)\iff A(x-y)=0\iff Ax=Ay$. T 还是连续的, 因为

$$\|T[x]\|=\inf_{Ay=Ax}\left\|Ay\right\|\le\|A\|\inf_{y\in[x]}\left\|y\right\|=\|A\|\cdot\|[x]\|_0.$$

由 Banach 逆算子定理, T^{-1} 连续, 从而对 $Ax_0=y_0$, 有

$$\inf_{Ax=y_n}\|x-x_0\|\le\left\|T^{-1}\right\|\cdot\left\|y_n-y_0\right\|\to 0,$$

存在 x_n 使得 $Ax_n=y_n$ 且

$$\|x_n-x_0\|\le 2\inf_{Ax=y_n}\|x-x_0\|\le 2\left\|T^{-1}\right\|\cdot\left\|y_n-y_0\right\|\to 0,$$

因此 $x_n\to x_0$. 若 $y_0=0$, 取 $C=2\left\|T^{-1}\right\|$. 若 $y_0\ne 0$, 存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对充分大 (不妨设是所有) 的 n 有 $\left\|y_n\right\|>\varepsilon_0$. 因此

$$\begin{aligned}\|x_n\|&\le\|x_n-x_0\|+\|x_0\|\le 2\left\|T^{-1}\right\|\cdot\left\|y_n-y_0\right\|+\|x_0\|\\&\le 2\left\|T^{-1}\right\|\cdot\left\|y_n\right\|+2\left\|T^{-1}\right\|\cdot\left\|y_0\right\|+\|x_0\|\\&\le\left(2\left\|T^{-1}\right\|+\frac{2\left\|T^{-1}\right\|\cdot\left\|y_0\right\|+\|x_0\|}{\varepsilon}\right)\left\|y_n\right\|,\quad\forall n\ge 1.\end{aligned}$$

✍ **题目2.3.12.** 设 X,Y 是 Banach 空间, T 是闭线性算子, $D(T)\subset X,\mathbb{R}(T)\subset Y,N(T)\triangleq\{x\in X:Tx=0\}$. 求证:

(1) $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2) 若 $N(T)=\{0\}$, 则 $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是: 存在 $\alpha>0$ 使得

$$\|x\|\le\alpha\|Tx\|,\quad\forall x\in D(T).$$

(3) $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是: 存在 $\alpha>0$ 使得

$$d(x,N(T))\le\alpha\|Tx\|,\quad\forall x\in D(T).$$

解答. (1) 设 $Tx_n=0$ 且 $x_n\to x,Tx_n\to Tx$, 因此 $Tx=0,x\in N(T)$, $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2) 由于 $N(T)=\{0\}$, 因此 T 是单射, $\|x\|\le\alpha\|Tx\|(\forall x\in D(T))\iff\left\|T^{-1}y\right\|\le$

$\alpha\|y\|(\forall y \in R(D)) \iff T^{-1}$ 连续 $\xLeftrightarrow[X\text{完备}]{T^{-1}\text{是闭算子}} R(T)$ 闭.

(3) 令 $\tilde{T}: D(T)/N(T) \to R(T), [x] \mapsto Tx$ 为良定义的双射, 且 $R(\tilde{T}) = R(T)$, 因此由 (2), $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是: 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$d(x, N(T)) = \|[x]\|_0 \le \alpha \left\|\tilde{T}[x]\right\| = \alpha\|Tx\|, \quad \forall x \in D(T).$$

✍ **题目2.3.13.** 设 $a(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函, 满足

(1) 存在 $M > 0$ 使得 $\left|a(x,y)\right| \le M\|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in H;$

(2) 存在 $\delta > 0$ 使得 $|a(x,x)| \ge \delta\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$

求证: $\forall f \in H^*$, 存在唯一的 $y_f \in H$ 使得

$$a(x, y_f) = f(x), \quad \forall x \in H,$$

而且 y_f 连续地依赖于 f.

解答. 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一有连续逆的 $A \in L(H)$ 使得

$$a(x,y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 z_f, $\|z_f\| = \|f\|$ 且

$$f(x) = (x, z_f) = a(x, A^{-1}z_f), \quad \forall x \in H,$$

若 $\|f\| \to 0$, 则 $\|z_f\| \to 0$, $\|y_f\| \to 0$, 因此 y_f 连续地依赖于 f.

2.4 Hahn-Banach 定理

2.4.1 线性泛函的延拓定理

定义 2.4.1: 延拓

设 X 为线性空间, G_1, G_2 均为 X 的子空间, f_1, f_2 分别是这两个子空间上的线性泛函. 若

(1) $G_1 \subset G_2$;

(2) $f_2(x) = f_1(x), \forall x \in G_1$.

则称 f_2 是 f_1 在 G_2 上的**延拓**.

定义 2.4.2: 次线性泛函

设 X 是线性空间, $p : X \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) 正齐次性: $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in X, \lambda > 0$.

(2) 次可加性: $p(x + y) \le p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

则称 p 是 X 上的**次线性泛函**.

定理 2.4.3: 实线性空间 Hahn-Banach 定理

设 X 是实线性空间, p 是定义在 X 上的次线性泛函, X_0 是 X 的实线性子空间, f_0 是 X_0 上的实线性泛函并满足 $f_0(x) \le p(x) (\forall x \in X_0)$. 那么 X 上必有一个实线性泛函 f, 满足:

(1) $f(x) \le p(x) \quad (\forall x \in X)$ (受 p 控制条件);

(2) $f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in X_0)$ (延拓条件).

☞ **注**

该定理的证明使用了 Zorn 引理, Zorn 引理及其背景知识见附录A.5的定理A.5.4.

在证明定理2.4.3之前, 先证明如下引理:

引理 2.4.4

在定理2.4.3的条件下, 若 X_0 还是 X 的真子空间, 则任取 $x_0 \in X \setminus X_0$, 存在 $\mathbb{R}x_0 \oplus X_0$ 上的线性泛函 f 使得

$$f(\lambda x_0 + x) \le p(\lambda x_0 + x)(\forall x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}) \quad 且 \quad f\big|_{X_0} = f_0.$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}
& f_0(x) + f_0(y) = f_0(x+y) \le p(x+y) \le p(x - x_0) + p(x_0 + y), \\
\Longrightarrow\ & f_0(x) - p(x - x_0) \le -f_0(y) + p(x_0 + y), \quad \forall x, y \in X_0 \\
\Longrightarrow\ & \exists \alpha \in \mathbb{R}, \sup_{x \in X_0} \Big(f_0(x) - p(x - x_0)\Big) \le \alpha \le \inf_{y \in X_0} \Big(-f_0(y) + p(x_0 + y)\Big).
\end{aligned}$$

则依

$$f(\lambda x_0 + x) \triangleq \lambda \alpha + f_0(x), \quad \forall x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}$$

定义的线性泛函 f 满足条件, 因为

$$\begin{cases}
f(\lambda x_0 + x) = \lambda\big(\alpha + f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\big) \le \lambda \cdot p\big(x_0 + \frac{x}{\lambda}\big) = p(\lambda x_0 + x), & \forall \lambda > 0, \\
f(\lambda x_0 + x) = -\lambda\big(-\alpha + f(-\frac{x}{\lambda})\big) \le -\lambda \cdot p(-\frac{x}{\lambda} - x_0) = p(\lambda x_0 + x), & \forall \lambda < 0.
\end{cases}$$

□

定理2.4.3的证明. 在集合

$$U = \left\{ (E, f) \,\middle|\, \begin{smallmatrix} E \subset X \\ f|_{X_0} = f_0 \\ f(x) \le p(x)(\forall x \in E) \end{smallmatrix} \right\}$$

上定义偏序关系如下:

$$(E_1, f_1) \preccurlyeq (E_2, f_2) \iff E_1 \subset E_2 \text{ 且 } f_2\big|_{E_1} = f_1.$$

任意全序集 $\{(E_\alpha, f_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ 都有上界

$$(E^*, f^*),\quad \text{其中} E^* = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha, f^*(x) = f_\alpha(x), \forall x \in E_\alpha.$$

因此 U 存在极大元, 记为 (E, f). 下面证明 $E = X$. 反设 $E \subsetneqq X$, 则取 $x_0 \in X \setminus E$, 由引理2.4.4, 在 $\mathbb{R}x_0 \oplus E$ 上存在定义域更大的线性泛函, 与 (E, f) 是极大元矛盾, 因此 $E = X$. □

☞ **注**

若 X 是复线性空间, f 是其上的 (复) 线性泛函. 若将其分解为实部和虚部: $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$. 则由 $f(ix) = if(x)$ 可得 $\varphi(ix) + i\psi(ix) = i\varphi(x) - \psi(x)$, 从而 $\psi(x) = -\varphi(ix)$, 故

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix),\quad \forall x \in X.$$

此外, 由 $\varphi = \frac{f+\overline{f}}{2}, \psi = \frac{f-\overline{f}}{2i}$ 不难得出 φ 和 ψ 是实线性泛函. 据此可以得到复线性空间的 Hahn-Banach 定理.

定理 2.4.5: 复线性空间 Hahn-Banach 定理

设 X 是复线性空间, p 是 X 上的半范数 (即去掉条件 $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ 的范数). X_0 是 X 的线性子空间, f_0 是 X_0 上的线性泛函, 并满足 $\left|f_0(x)\right| \le p(x), \forall x \in X_0$, 那么 X 上必有一个线性泛函 f 满足:

(1) $\left|f(x)\right| \le p(x)\quad (\forall x \in X)$;

(2) $f(x) = f_0(x)\quad (\forall x \in X_0)$.

☞ **注**

对实线性空间显然也有此结论, 因为若 $f(x) \le p(x) (\forall x \in X)$, 则对 $f(x) < 0$, 有 $\left|f(x)\right| = f(-x) \le p(-x) = p(x)$.

证明. 记 $u_0 = \mathrm{Re}\, f_0$ 为 X_0 上的实线性泛函, 则由实 Hahn-Banach 定理, 存在 X 上的实线性泛函 u 使得

$$u(x) \le p(x) (\forall x \in X),\quad u\big|_{X_0} = u_0.$$

令 $f(x) = u(x) - iu(ix) (\forall x \in X)$, 不难验证 $f\big|_{X_0} = f_0$, 并且 f 是 X 上的复线性泛函. 此

外, 任取 $x \in X$, 记 $\alpha = \operatorname{sign}\overline{f(x)}$, 则

$$\left|f(x)\right| = \operatorname{sign}(\overline{f(x)}) \cdot f(x) = \alpha f(x) = f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x),$$

其中 $f(\alpha x) = u(\alpha x)$, 因为 $f(\alpha x) = \left|f(x)\right| \in \mathbb{R}$. □

定理 2.4.6: 赋范空间 Hahn-Banach 定理

设 X 是赋范空间, X_0 是 X 的线性子空间, f_0 是定义在 X_0 上的有界线性泛函, 则在 X 上必存在有界线性泛函 f 满足:

(1) $f|_{X_0} = f_0$ (延拓条件),

(2) $\|f\| = \|f_0\|_{X_0}$ (保范条件),

其中 $\|f\|_{X_0} = \sup\limits_{x \in X_0} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|}$ 为 f_0 在 X_0 上的范数.

证明. 记 $p(x) = \|f_0\|_{X_0} \cdot \|x\|, \forall x \in X$, 则由线性空间 Hahn-Banach 定理, 存在 X 上的有界线性泛函满足 $f|_{X_0} = f_0$ 且 $|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\|_{X_0} \cdot \|x\|, \forall x \in X$. 因此 $\|f\| \leq \|f_0\|_{X_0}$. 并且由

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in X_0} \frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|} = \sup_{x \in X_0} \frac{\left|f_0(x)\right|}{\|x\|} = \|f_0\|_{X_0}$$

知 $\|f\| = \|f_0\|_{X_0}$. □

推论 2.4.7

设 X 是赋范空间, 任取 $x_0 \in X \setminus \{0\}$, 必存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad \text{且} \quad \|f\| = 1.$$

证明. 令 $f_0(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\| (\forall \lambda \in \mathbb{K})$ 是定义在 $\mathbb{K}x_0$ 上的有界线性泛函, 满足 $\|f_0\|_{\mathbb{K}x_0} = 1$. 由定理2.4.6知, 存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\| (\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad \text{且} \quad \|f\| = \|f_0\|_{X_0} = 1,$$

取 $\lambda = 1$ 即得 $f(x_0) = \|x_0\|$. □

推论 2.4.8

设 x_1, x_2 是赋范空间 X 上不同的两点, 则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 也即若 $f(x_1) = f(x_2)(\forall f \in X^*)$, 则 $x_1 = x_2$.

☞ **注**

该推论可以用于判断赋范空间中的点 x 是否为零元: 只需验证是否有 $f(x) = 0, \forall f \in X^*$.

证明. 在推论2.4.7中取 $x_0 = x_1 - x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0,$$

满足条件. □

定理 2.4.9

设 X 是赋范空间, M 是 X 的线性子空间. 若 $x_0 \in X$ 且

$$d = \rho(x_0, M) > 0,$$

则必存在 $f \in X^*$ 使得

$$f\big|_M = 0, \quad f(x_0) = d \quad 且 \quad \|f\| = 1.$$

证明. 在定理2.4.6中取 $X_0 = \mathbb{K}x_0 \oplus M$,

$$f_0(\lambda x_0 + y) = \lambda d(\forall \lambda \in \mathbb{K}, y \in M),$$

则得到的 f 满足 $f\big|_M = 0, f(x_0) = d$. 此外,

$$\|f_0\|_{X_0} = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\lambda| d}{\|\lambda x_0 + y\|} = \sup_{z \in M} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf\limits_{z \in M} \|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1,$$

因此 $\|f\| = 1$. □

推论 2.4.10

设 M 是赋范空间 X 的子集, $x_0 \in X$. 则

$$x_0 \in \overline{\operatorname{span} M}$$

的充要条件是: 任取 $f \in X^*$, 若 $f|_M = 0$, 则 $f(x_0) = 0$.

证明. 必要性: 若 $x_0 \in \overline{\operatorname{span} M}$, 则存在 $\{x_n\} \subset M$ 和 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$, 使得

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n.$$

任取 $f \in X^*$ 且 $f|_M = 0$, 有

$$f(x_0) = \lim_{N\to\infty} f\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f(x_n) = 0.$$

充分性: 反设 $x_0 \notin \overline{\operatorname{span} M}$, 则由 $\overline{\operatorname{span} M}$ 是闭子空间,

$$d = \rho(x_0, M) \geq \rho\left(x_0, \overline{\operatorname{span} M}\right) > 0.$$

由定理2.4.9, 存在 $f \in X^*$ 使得 $f|_M = 0$ 但 $f(x_0) = d \neq 0$, 矛盾. □

☞ 注

根据上面推论不难得到: 设 M 是赋范空间 X 的稠密子集, 若 $f \in X^*$ 满足 $f|_M = 0$, 则 $f \equiv 0$.

2.4.2 几何形式——凸集分离定理

定义 2.4.11: Minkowski 泛函

设 X 为线性空间, C 是 X 中的凸集, 则称

$$p(x)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{x}{\lambda}\in C\right\},\quad x\in X$$

为 C 的**Minkowski 泛函**.

定义 2.4.12: 超平面

设 X 为线性空间, f 是 X 上的线性泛函, $c\in\mathbb{K}$, 称集合

$$H_f^c=\left\{x\in X:f(x)=c\right\}$$

为 X 中的**超平面**.

本节接下来的内容若无特别说明只考虑数域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 的情况.

引理 2.4.13

设 X 是赋范空间, f 是 X 上的线性泛函, 则 f 有界的充要条件为: 存在 $c\in\mathbb{K}$ 使得 H_f^c 是闭集.

证明. 由2.1的题目2.1.6知 f 有界当且仅当 $N(f)$ 闭, 而 H_f^c 是 $N(f)$ 的平移, 因此 $N(f)$ 闭当且仅当 H_f^c 闭. □

定义 2.4.14: 分离与严格分离

设 A,B 是实赋范空间 X 中的凸集, $f\in X^*$. 若存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x)\le\alpha\le f(y),\quad\forall x\in A,y\in B,$$

则称超平面 H_f^α **分离** A 与 B.

若还存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$f(x)\le\alpha-\varepsilon<\alpha+\varepsilon\le f(y),\quad\forall x\in A,y\in B,$$

则称超平面 H_f^α **严格分离** A 与 B.

定理 2.4.15: Minkowski 泛函的性质

设 X 是赋范空间, C 是 X 中包含 0 的开凸子集. 则 C 的 *Minkowski* 泛函满足

(1) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall x \in X, \alpha > 0$.

(2) $p(x+y) \le p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

(3) 存在 $M > 0$ 使得 $p(x) \le M\|x\|, \forall x \in X$.

(4) $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

证明. (1) 只需注意到对 $x \in X$, 有

$$p(\alpha x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{\alpha x}{\lambda} \in C\right\} = \alpha \inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\right\} = p(x).$$

(2) 对 $x, y \in X$, 任取 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C \\
\Longrightarrow &\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \\
= &\frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C,
\end{aligned}$$

故 $p(x+y) \le p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.

(3) 由 $0 \in C$ 且 C 是开集, 则存在 $r > 0$ 使得 $\overline{B}(0,r) \subset B(0,2r) \subset C$. 故对 $x \in X$ 都有 $\frac{rx}{\|x\|} \in B(0,r) \subset C$, 从而 $p(x) \le \frac{1}{r}\|x\|, \forall x \in X$.

(4) 若 $p(x) < 1$, 则根据 Minkowski 泛函的定义, $x = \frac{x}{1} \in C$. 若 $x \in C$, 则由 C 是开集知存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x,\delta) \subset C$. 从而存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $(1+\lambda_0)x \in C$, 因此 $p(x) \le \frac{1}{1+\lambda_0} < 1$.

$\square$

引理 2.4.16

设 X 是实赋范空间, C 是非空开凸子集, $x_0 \in X \setminus C$. 则存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in C.$$

也即 $H_f^{f(x_0)}$ 分离 C 和 x_0.

证明. 不妨设 $0 \in C$, 否则取 $c \in C$, 考虑 $C - c$ 和 $x_0 - c$ 即可. 在子空间 $\mathbb{R}x_0$ 上定义线性泛函

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

则 $f_0(\alpha x_0) = \alpha \le \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 X 上的线性泛函 f 满足

$$f\big|_{\mathbb{R}x_0} = f_0 \quad 且 \quad f(x) \le p(x), \quad \forall x \in X.$$

由上一定理知存在 $M > 0$ 使得

$$f(x) \le p(x) \le M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

故 $f \in X^*$. 并且有

$$f(x_0) = f_0(x_0) = 1 > p(x) \ge f(x), \quad \forall x \in C.$$

□

定理 2.4.17: Hahn-Banach 定理——第一几何形式

设 X 是实赋范空间, A, B 是非空凸子集满足 $A \cap B = \varnothing$. 若 A 是开集, 则存在闭超平面分离 A 与 B. 也即存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(x) \le f(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

☞ **注**

该定理对存在内点的凸集 A 也成立.

证明. 记 $x_0 = 0, C = A - B$, 则 C 是非空凸开集, $x_0 \notin C$, 使用上一引理, 则存在 $f \in X^*$

使得

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in C.$$

此即 $f(a) < f(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$ □

引理 2.4.18

设 X 是赋范空间, A 是闭集, B 是紧集, 则 $A+B$ 是闭集.

证明. 若 $a_n + b_n \to c$, 其中 $a_n \in A, b_n \in B, c \in X$. 则 $\{b_n\}$ 有收敛子列 $b_{n_k} \to b \in B$. 从而 $a_{n_k} \to c - b$. 由于 A 是闭集, $c - b \in A$. 因此 $c = (c-b) + b \in A+B$, $A+B$ 是闭集. □

定理 2.4.19: Hahn-Banach 定理——第二几何形式

设 X 是实赋范空间, A, B 是非空凸子集满足 $A \cap B = \varnothing$. 若 A 是闭集, B 是紧集, 则存在闭超平面严格分离 A 与 B.

证明. 记 $C = A - B$, 则不难验证 C 是非空闭凸集, 并且 $0 \notin C$. 故存在 $r > 0$ 使得 $B(0,r) \cap C = \varnothing$. 对 C 和 $B(0,r)$ 应用上一定理可得存在非零的 $f \in X^*$ 使得

$$f(a-b) < f(y), \quad \forall a \in A, b \in B, y \in B(0,r).$$

在上式中对 y 取下确界, 得

$$f(a) - f(b) \le -r\|f\|, \quad \forall a \in A, b \in B.$$

因此 $f(a) \le f(b) - r\|f\|, \forall a \in A, b \in B$. 记 $\alpha = \sup\limits_{a \in A} f(a)$, $\beta = \inf\limits_{b \in B} f(b)$, $\varepsilon = r\|f\|$, 则

$$f(a) \le \alpha \le \beta - \varepsilon < \beta \le f(b),$$

上式对 $\forall a \in A, b \in B$ 均成立. □

2.4.3 作业

✍ **题目2.4.1.** 设 X_0 是赋范空间 X 的闭子空间, 求证:

$$\rho(x,X_0)=\sup\{\left|f(x)\right|:\|f\|=1,f(X_0)=0\},\quad \forall x\in X.$$

解答. 记等式右侧为 α. 由 $\left|f(x)\right|=\left|f(x-y)\right|\le\|f\|\cdot\|x-y\|=\|x-y\|,\forall y\in X_0$ 知 $\alpha\le\rho(x,X_0)$.

下面证明 $\rho(x,X_0)\le\alpha$. 若 $x\in X_0$, 则 $\rho(x,X_0)=\alpha=0$. 现设 $x\notin X_0$, 则 $\rho(x,X_0)>0$, 由 Hahn-Banach 定理知存在 $f\in X^*$ 使得

$$f(x)=\rho(x,X_0),\quad \|f\|=1 \quad 且 \quad f(X_0)=0,$$

因此 $\rho(x,X_0)\le\alpha$.

✍ **题目2.4.2.** 设 X 是赋范空间. 给定 X 中 n 个线性无关的元素 $x_1,\cdots,x_n$ 与数域 $\mathbb{K}$ 中的 n 个数 $C_1,\cdots,C_n$, 及 $M>0$. 求证: 存在 $f\in X^*$ 满足 $f(x_k)=C_k(1\le k\le n)$ 并且 $\|f\|\le M$ 的充要条件是:

$$\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|\le M\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right\|,\quad \forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}.$$

解答. 必要性:

$$\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|=\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kf(x_k)\right|=\left|f\left(\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right)\right|\le\|f\|\cdot\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right\|\le M\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right|.$$

充分性: 定义

$$f_0\left(\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k(\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{K}),\quad p(x)=M\|x\|(\forall x\in X),$$

并使用复 Hahn-Banach 定理即可.

✍ **题目2.4.3.** 给定赋范空间 X 中的 n 个线性无关的元素 $x_1,\cdots,x_n$, 求证: 存在 $f_1,\cdots,f_n\in$

X^* 使得

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

解答. 记

$$M_k = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n\}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

注意到 $\rho(x_k, M_k) > 0$, 因此由 Hahn-Banach 定理, 存在 $g_k \in X^*$ 使得

$$\|g_k\| = 1, \quad g_k(x_k) = \rho(x_k, M_k), \quad g_k\big|_{M_k} = 0, \quad k = 1, \cdots, n,$$

取 $f_k = \frac{g_k}{\rho(x_k, M_k)}$ 即可.

✍ **题目2.4.4.** 设 M 是实赋范空间 X 中的闭凸集, 求证: 任取 $x \in X \setminus M$, 存在 $f_1 \in X^*$ 满足 $\|f_1\| = 1$ 并且

$$\sup_{y \in M} f_1(y) \le f_1(x) - \rho(x, M).$$

解答. 记 $d = \rho(x, M) > 0$, 则 $B(x, d) \cap M = \varnothing$, 由凸集分离定理, 存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(y) \le f(x + dz), \quad \forall y \in M, \|z\| < 1.$$

不妨设 $\|f\| = 1$(否则令 $f_1 = \frac{f}{\|f\|}$ 依旧满足上式). 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\|z_0\| < 1$ 使得

$$1 - \varepsilon \le f(z_0) \le 1,$$

从而

$$\sup_{y \in M} f(y) \le f(x - dz_0) = f(x) - df(z_0) \le f(x) - d(1 - \varepsilon).$$

由 ε 任意性, $\sup\limits_{y \in M} f(y) \le f(x) - d$.

✍ **题目2.4.5.** 设 M 是实赋范空间 X 内的闭凸集, 求证:

$$\inf_{z \in M} \|x - z\| = \sup_{\|f\| = 1} \left(f(x) - \sup_{z \in M} f(z) \right), \quad \forall x \in X.$$

解答. 若记上式右侧为 α, 则

$$\alpha = \sup_{\|f\|=1} \inf_{z\in M} f(x-z) \le \sup_{\|f\|=1} \inf_{z\in M} \|f\| \cdot \|x-z\| = \inf_{z\in M} \|x-z\|.$$

另一方面, 由上题, 存在 $f_1 \in X^*$ 且 $\|f_1\| = 1$ 使得

$$\rho(x, M) \le f_1(x) - \sup_{z\in M} f_1(z) \le \alpha,$$

因此 $\rho(x, M) = \alpha$.

2.5 共轭空间

2.5.1 共轭空间与共轭算子

定义 2.5.1: 共轭空间

设 X 是赋范空间, $X^* = L(X, \mathbb{K})$ 称为 X 的**共轭空间**或**对偶空间**, 则 X^* 是 Banach 空间.

定理 2.5.2: Banach 定理

设 X 是赋范空间, 若 X^* 可分, 则 X 也可分.

证明. 设 $\{f_n\}$ 是 X^* 的可数稠密子集. 取 $\{x_n\}$ 满足

$$\|x_n\| = 1 \quad 且 \quad |f_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|f_n\|, \quad \forall n \ge 1.$$

记 $X_0 = \overline{\mathrm{span}\{x_n\}_1^\infty}$, 则 X_0 是 X 的可分闭子空间, 只需证明 $X_0 = X$. 反设 $X_0 \ne X$, 取 $x_0 \notin X_0$ 且 $\|x_0\| = 1$, 由 Hahn-Banach 定理 (定理2.4.9), 存在 $f \in X^*$ 使得 $\|f\| = 1$ 且 $f|_{X_0} = 0$. 取 $\{g_n\} \subset \{f_n\}$ 使得 $g_n \to f$, 则

$$\|g_n - f\| \ge |g_n(x_n) - f(x_n)| = |g_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|g_n\|, \quad \forall n \ge 1,$$

在上式中令 $n \to \infty$, 则 $0 \ge \frac{1}{2}\|f\| = \frac{1}{2}$, 矛盾. □

定义 2.5.3: 第二共轭空间与自反性

设 X 为赋范空间, X^* 的共轭空间记为 X^{**}, 称作 X 的**第二共轭空间**. 称

$$\tau : X \to X^{**}, x \mapsto x^{**} \quad \text{满足} \quad \langle x^{**}, f\rangle = \langle f, x\rangle, \forall f \in X^*$$

的映射 τ 为从 X 到 X^{**} 的**自然嵌入映射**, τ 保持范数, 也即

$$\|x\| = \|\tau x\|, \quad \forall x \in X.$$

如果 τ 是满射 (X 从 X^{**} 的等距同构), 则称 X 是**自反空间**.

证明. 需要证明 τ 保持范数. 一方面,

$$\left|\langle x^{**}, f\rangle\right| = \left|\langle f, x\rangle\right| \le \|x\| \cdot \left\|f\right\|, \quad \forall f \in X^*,$$

故 $\|x^{**}\| \le \|x\|$. 另一方面, 由 Hahn-Banach 定理 (推论2.4.7), 存在 $f_0 \in X^*$ 使得

$$\left\|f\right\| = 1 \quad \text{且} \quad f(x) = \|x\|,$$

故 $\|x^{**}\| = \|x\|$. □

定义 2.5.4: 共轭算子

设 X, Y 是赋范空间, $T \in L(X, Y)$. $T^* : Y^* \to X^*$ 满足

$$\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^* y^*, x\rangle, \quad \forall y^* \in Y^*, x \in X.$$

T^* 称为 T 的**共轭算子**.

定理 2.5.5: 共轭算子的性质

设 X, Y, Z 是赋范空间, $S, T \in L(X, Y), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则

(1) $T^* \in L(Y^*, X^*)$, 并且 $\|T\| = \|T^*\|$.

(2) $(\alpha S + \beta T)^* = \alpha S^* + \beta T^*$.

(3) 若 $T_1 \in L(X,Y), T_2 \in L(Y,Z)$, 则 $(T_2T_1)^* = T_1^*T_2^*$.

(4) $I_X^* = I_{X^*}$, 其中 I_X 和 I_{X^*} 分别是 X 和 X^* 到本身的单位映射.

(5) $T^{**} = (T^*)^* \in L(X^{**}, Y^{**})$ 并且 $\|T^{**}\| = \|T\|$, 因此在自然嵌入映射的意义下, T^{**} 可视作 T 的保范延拓.

(6) 若 $T \in L(X,Y)$ 是双射, 则 $T^{-1} \in L(Y,X)$ 且 $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(7) 若 X 是 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 并且 T^* 是双射, 则 T 也是双射.

证明. 只证明 (1)(6)(7), 其余显然.

(1) 一方面,

$$\left\|(T^*f)(x)\right\| = \left\|f(Tx)\right\| \le \left\|f\right\| \cdot \|Tx\| \le \|T\| \cdot \left\|f\right\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X, f \in X^*,$$

故 $\left\|T^*f\right\| \le \|T\| \cdot \left\|f\right\| (\forall f \in X^*)$, 从而 $\|T^*\| \le \|T\|$, $T^* \in L(Y^*, X^*)$. 此外, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\|x_\varepsilon\| = 1$ 使得

$$\|T\| - \varepsilon \le \|Tx_\varepsilon\| \le \|T\|.$$

并且由 Hahn-Banach 定理 (推论2.4.7), 存在 f_ε 使得

$$\left\|f_\varepsilon\right\| = 1 \quad 且 \quad f(Tx_\varepsilon) = \|Tx_\varepsilon\|.$$

故

$$\left\|T^*\right\| \ge \left\|T^*f_\varepsilon\right\| \ge \left\|(T^*f_\varepsilon)(x_\varepsilon)\right\| = \left\|f_\varepsilon(Tx_\varepsilon)\right\| = \|Tx_\varepsilon\| \ge \|T\| - \varepsilon,$$

由 ε 的任意性, $\|T\| = \|T^*\|$.

(6) 由 Banach 逆算子定理 (定理2.3.4), 有 $T^{-1} \in L(Y,X)$. 由共轭算子的性质 (3) 以及 $T \circ T^{-1} = I_Y, T^{-1} \circ T = I_X$, 有

$$(T^{-1})^* \circ T^* = I_{Y^*}, \quad T^* \circ (T^{-1})^* = I_{X^*},$$

此即 $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(7) 由性质 (6) 知 T^{**} 是从 X^{**} 到 Y^{**} 的线性同构. 则存在 $C>0$ 使得

$$\frac{1}{C}\|x^{**}\| \leq \|T^{**}x^{**}\| \leq C\|x^{**}\|, \quad \forall x^{**} \in X^{**}.$$

在上式中取 $x^{**}=\tau x$, 其中 $x \in X$, $\tau : X \to X^{**}$ 是自然嵌入映射, 得

$$\frac{1}{C}\|x\| \leq \|Tx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

因此 T 是单射并且 $R(T)$ 是闭的. 还需证明 $R(T)=Y$. 反设 $R(T)\neq Y$, 则由 Hahn-Banach 定理 (定理2.4.9) 知存在非零的 $y^* \in Y^*$ 使得 $y^*|_{R(T)}=0$, 此即

$$\langle y^*, Tx\rangle = 0, \quad \forall x \in X.$$

从而 $\langle T^*y^*, x\rangle = 0, \forall x \in X$, 从而 $T^*y^*=0$, 而 T^* 是单射, 因此 $y^*=0$, 矛盾. 故 T 是双射. □

定义 2.5.6: Hilbert 空间上的共轭算子

设 H 是 Hilbert 空间, $T \in L(H)$, 其**共轭算子** T' 由下式定义:

$$(Tx, y) = (x, T'y), \quad \forall x, y \in H.$$

☞ **注**

由 Riesz 表示定理可知存在共轭等距线性同构 $\Psi : H \to H^*$, **则容易验证** $T' = \Psi^{-1}T^*\Psi$, **此外不难证明** T' **的唯一性**, $T' \in L(H)$ **并且** $\|T\| = \|T'\|$.

此后为了保持一致性, Hilbert 空间和 Banach 空间上的共轭算子均记作 T^*.

Hilbert **空间上的共轭算子还满足** $(\alpha S+\beta T)^* = \overline{\alpha}S^* + \overline{\beta}T^*$, $(ST)^* = T^*S^*$ **以及** $T = T^{**}$.

定义 2.5.7: Hilbert 空间之间的共轭算子

设 X, Y 是 Hilbert 空间, $T \in L(X,Y)$. 存在 $T^* \in L(Y,X)$ 使得

$$(Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

则称 T^* 是 T 的**共轭算子**.

定义 2.5.8: Hilbert 空间上的自伴算子

设 H 是 Hilbert 空间, $T \in L(H)$. 若 $T^* = T$, 则称 T 是**自伴算子**, **自共轭算子**或**对称算子**, 也即满足

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad \forall x, y \in H.$$

定理 2.5.9

设 X 是 Hilbert 空间, $T \in L(X)$ 是自伴算子, 则 $Ker(T) = R(T)^{\perp}$.

证明. $x \in Ker(T) \iff Tx = 0 \iff (Tx, y) = 0 (\forall y \in X) \iff (x, Ty) = 0 (\forall y \in X) \iff x \in R(T)^{\perp}$. □

定义 2.5.10

设 X 是赋范空间, M 是 X 的子空间, N 是 X^* 的子空间. 定义

$$^{\perp}M = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\},$$

$$N^{\perp} = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in N\}.$$

☞ **注**

$^{\perp}M$ **和** $N^{\perp}$ **都是闭子空间, 因为** $^{\perp}M = \bigcap\limits_{x \in M} Ker(\tau x), N^{\perp} = \bigcap\limits_{f \in N} Ker(f)$.

$(^{\perp}M)^{\perp} = \overline{M}$, **证明留作习题.**

$\overline{N} \subset {}^{\perp}(N^{\perp})$, **当** X **自反时二者相等.**

定理 2.5.11

设 X, Y 是赋范空间, $T \in L(X, Y)$, 则

$$Ker(T^*) = {}^{\perp}R(T), \quad Ker(T) = R(T^*)^{\perp}.$$

证明. 留作习题. □

☞ **注**

$(Ker\, T^*)^{\perp} = \left({}^{\perp}R(T)\right)^{\perp} = \overline{R(T)}, \quad {}^{\perp}(Ker\, T) = {}^{\perp}\left(R(T)^{\perp}\right) \supset \overline{R(T^*)}.$

2.5.2 弱收敛和 * 弱收敛

定义 2.5.12: 线性算子的三种收敛

设 X,Y 是赋范空间, $T_n, T \in L(X,Y)$.

1. 若 $\|T_n - T\| \to 0$, 则称 T_n**一致收敛**于 T, 记作 $T_n \rightrightarrows T$, T 称作 $\{T_n\}$ 的**一致极限**.
2. 若 $\|T_n x - Tx\| \to 0 (\forall x \in X)$, 则称 T_n**强收敛**于 T, 记作 $T_n \to T$, T 称作 $\{T_n\}$ 的**强极限**.
3. 若
$$\lim_{n\to\infty} f(T_n x) = f(Tx), \quad \forall x \in X, f \in Y^*,$$
也即 $T_n x \rightharpoonup Tx (\forall x \in X)$, 则称 T_n**弱收敛**于 T, 记作 $T_n \rightharpoonup T$, T 称作 $\{T_n\}$ 的**弱极限**.

☞ 注

显然, 一致收敛 $\Longrightarrow$ 强收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛, 反之不一定成立.

三种极限如果存在都必唯一, 前两种显然, 对于弱收敛, 若 $T_n \rightharpoonup T_1$ 且 $T_n \rightharpoonup T_2$, 则如果 $T_1 \neq T_2$, 那么存在 $x \in X$ 使得 $T_1 x \neq T_2 x$. 而由 Hahn-Banach 定理 (推论2.4.8), 存在 $f \in X^*$ 使得 $f(T_1 x) \neq f(T_2 x)$, 与弱收敛的定义矛盾.

例 2.5.13: 强收敛但不一致收敛

l^2 空间上的左推移算子

$$T: (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_2, x_3, \cdots)$$

满足 $T^n \to 0$ 但 $T^n \not\rightrightarrows 0$.

证明. 显然,

$$T^n: (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots).$$

任取 $x = \{x_k\} \in l^2$, 有

$$\|T^n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

因此 $T^n \to 0$. 但是

$$\left\|T^n\right\| \geq \left\|T^n e_{n+1}\right\| = \|e_1\| = 1,$$

其中 e_k 表示第 k 分量为 1 其余为 0 的数列 $(k \geq 1)$, 故 $T^n \not\rightrightarrows 0$. □

例 2.5.14: 弱收敛但不强收敛

l^2 空间上的右推移算子

$$S : (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots)$$

满足 $S^n \to 0$ 但 $S_n \not\to 0$.

证明. 显然,

$$S^n : (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n}, x_1, x_2, \cdots).$$

由于 l^2 是 Hilbert 空间, 故由 Riesz 表示定理和

$$\begin{aligned}\left|(S^n x, y)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} (S^n x)_k \overline{y_k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_{n+k}}\right| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|y_k\right|^2\right) \to 0, \quad \forall x, y \in l^2\end{aligned}$$

知 $S^n \to 0$. 但是 $\|S^n x\| = \|x\| (\forall x \in l^2)$, 故 $S^n \not\to 0$. □

定义 2.5.15: ∗ 弱收敛

设 X 是赋范空间, $f_n, f \in X^*$. 若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X,$$

则称 $\{f_n\}$ ∗ **弱收敛**到 f, 记作 $\omega^* - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, f 称作 $\{f_n\}$ 的 ∗ **弱极限**.

☞ **注**

∗ 弱收敛就是有界线性泛函的强收敛, 而它们的弱收敛与强收敛等价 (因为 $X^* = L(X, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ 是一维的), 因此不作讨论.

命题 2.5.16

设 X 是赋范空间, $f_n, f \in X^*$, 若 f_n $*$ 弱收敛于 f, 则 $\{f_n\}$ 有界 (即 $\sup\limits_{n\geq 1}\|f_n\| < \infty$) 并且

$$\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|f_n\|.$$

证明. 由于 f_n $*$ 弱收敛于 f, 故 $\forall x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$, 从而 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{K}$ 中有界, 从而由共鸣定理可知 $\{f_n\}$ 有界. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\|x_\varepsilon\| = 1$ 使得 $|f(x_\varepsilon)| \geq \|f\| - \varepsilon$, 而

$$\|f\| - \varepsilon \leq |f(x_\varepsilon)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x_\varepsilon)| \leq \liminf_{n\to\infty}\|f_n\|,$$

再由 ε 的任意性可得. □

定理 2.5.17

设 X 是可分赋范空间, $\{f_n\} \subset X^*$ 有界, 则 $\{f_n\}$ 有 $*$ 弱收敛子列.

证明. 由 X 可分知存在可数稠密子集 $\{x_k\} \subset X$. 由于 $\{f_n\}$ 有界, 故 $\{f_n(x_1)\}$ 在 $\mathbb{K}$ 中有界, 从而有子列 $\{f_n^{(1)}\}$ 使得 $f_n^{(1)}(x_1) \to y_1$. 而 $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ 也有界, 有子列 $\{f_n^{(2)}\}$ 使得 $f_n^{(2)}(x_2) \to y_2$. 依次类推, 得到

$$f_n^{(k)}(x_j) \to y_j, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

取对角列 $\{f_n^{(n)}\}$, 则 $f_n^{(n)}(x_k) \to y_k, \forall k \geq 1$. 最后由定理2.3.12的充分条件知 $\{f_n^{(n)}\}$ 弱 $*$ 收敛. □

定义 2.5.18: 弱收敛

设 X 是赋范空间, $\{x_n\} \subset X, x \in X$. 若

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \quad \forall f \in X^*,$$

则称 $\{x_n\}$ **弱收敛**到 x, 记作 $x_n \rightharpoonup x$, x 称作 $\{x_n\}$ 的**弱极限**.

☞ **注**

为了区分, 称 $x_n \to x$(按范数收敛) 为 x_n 强收敛到 x, 或 x 是 $\{x_n\}$ 的强极限.

命题 2.5.19

(1) 弱极限如果存在必唯一. (2) 强极限若存在必是弱极限, 反之未必成立.

证明. (1) 设 $x_n \rightharpoonup x$ 且 $x_n \rightharpoonup y$, 则

$$f(x-y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \quad \forall f \in X*,$$

由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f \in X^*$ 使得 $\|x-y\| = f(x-y) = 0 \implies x = y$.

(2) 强极限如果存在, 根据 f 的连续性显然必是弱极限. 现举例说明反之未必成立. 在 $X = L^2[0,2\pi]$ 上考虑点列 $\{\sin nx\}_1^\infty$. 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad \forall f \in L^2[0,2\pi],$$

由于 L^2 共轭是其本身, 上式即 $\sin nx \rightharpoonup 0$. 但是 $\|\sin nx\|_2 = \sqrt{\pi}$, 因此 $\sin nx \not\to 0$. □

命题 2.5.20

设 X 是赋范空间, $x_n, x \in X$ 且 $x_n \rightharpoonup x$, 则 $\{x_n\}$ 有界并且

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

证明. 记 $\tau : X \to X^{**}$ 是自然嵌入映射. 由于 $\forall f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x)$, 故 $\{f(x_n)\}$ 有界, 即 $\{\tau x_n(f)\}$ 有界, 从而由共鸣定理可得 $\{\tau x_n\}$ 有界, $\{x_n\}$ 有界. 由 Hahn-Banach 定理知存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) = \|x\|$ 且 $\|f\| = 1$, 从而

$$\|f\| = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

得证. □

定理 2.5.21

设 X 是 Banach 空间, $x_n, x \in X$. 则 $x_n \rightharpoonup x$ 的充要条件为

(1) $\{x_n\}$ 有界;

(2) 存在 X^* 的稠密子集 M 使得 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, $\forall f \in M$.

证明. 必要性: 由上一命题立即得到.

充分性: 记 τ 是 X 到 X^{**} 的自然嵌入映射, 则由定理2.3.12, $\{\tau x_n\}$ 有界和 $\langle \tau x_n, f\rangle$ 收敛 $(\forall f \in M)$ 可知 τx_n 弱 $*$ 收敛, 记其极限为 x^{**}. 而

$$\langle \tau x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \tau x, f_n\rangle = \langle x^{**}, f\rangle, \quad \forall f \in M.$$

任取 $g \in X^*$, 存在 $\{f_n\} \subset M$ 使得 $\|g - f_n\| \to 0$, 从而

$$\langle \tau x, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \tau x, f_n\rangle = \langle x^{**}, g\rangle,$$

因此 $x^{**} = \tau x$, x_n 弱 $*$ 收敛于 τx, 此即 $x_n \rightharpoonup x$. □

定理 2.5.22: Mazur 定理

设 X 是一个赋范空间, $x_n \rightharpoonup x_0$, 则

$$x_0 \in \overline{\mathrm{co}\big(\{x_n\}_1^\infty\big)},$$

也即存在 x_n 的凸组合序列强收敛于 x_0.

☞ **注**

凸包和凸组合的定义见附录A.7的定义A.7.3.

证明. 记 $M = \overline{\mathrm{co}\big(\{x_n\}_1^\infty\big)}$, 反设 $x_0 \notin M$. 由 Hahn-Banach 定理的第二几何形式, 存在 X 上的实有界线性泛函 u 使得

$$u(x) < \alpha < u(x_0), \quad \forall x \in M,$$

若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 则 $u \in X^*$, 上式已经与 $x_n \rightharpoonup x$ 矛盾.

若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 则 $f(x) = u(x) - iu(ix) \in X^*$. 由 $x_n \rightharpoonup x$ 知 $f(x_n) \to f(x_0)$, 从而 $u(x_n) \to u(x_0)$, 也与上式矛盾. □

定义 2.5.23: 弱闭集

设 X 是赋范空间, $A\subset X$. 若 A 满足 $\forall\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\rightharpoonup x\in X$ 都有 $x\in A$, 则 A 称为**弱闭集**.

命题 2.5.24

弱闭集一定是闭集, 闭凸集一定是弱闭集.

证明. 若 A 是弱闭集, 则对 $\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\to x$, 有 $x_n\rightharpoonup x$, 故 $x\in A$, 从而 A 是闭集.

若 A 是闭凸集, 则若 $\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\rightharpoonup x$, 由 Mazur 定理, $x\in\overline{\mathrm{co}\left(\{x_n\}_1^\infty\right)}\subset A$, 故 A 弱闭. □

2.5.3 自反空间的性质

定理 2.5.25: Pettis 定理

自反空间 X 的闭子空间 X_0 也是自反的.

证明. 任取 $x_0^{**}\in X_0^{**}$, 要证明存在 $x_0\in X_0$ 使得

$$\langle x_0^{**},x_0^*\rangle=\langle x_0^*,x_0\rangle,\quad \forall x_0^*\in X_0^*.$$

令 $T:X^*\to X_0^*, x^*\mapsto x^*|_{X_0}$, 则显然 $T\in L(X^*,X_0^*)$, 并且由 Hahn-Banach 定理知 T 是满射. 令 $x^{**}=T^*x_0^{**}$, 则由 X 自反知存在 $x\in X$ 使得 $\langle x^{**},x^*\rangle=\langle x^*,x\rangle(\forall x\in X)$. 从而

$$\langle x_0^{**},Tx^*\rangle=\langle T^*x_0^{**},x^*\rangle=\langle x^{**},x^*\rangle=\langle x^*,x\rangle,\quad \forall x^*\in X^*,$$

如果还有 $x\in X_0$, 则根据 $\langle Tx^*,x\rangle=\langle x^*,x\rangle$ 以及 T 是满射, 有

$$\langle x_0^{**},x_0^*\rangle=\langle x_0^*,x\rangle,\quad \forall x_0^*\in X_0^*.$$

下面证明 $x\in X_0$. 反设 $x\notin X_0$, 则由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f\in X^*$ 使得 $f|_{X_0}=0$ 且 $f(x)\neq 0$, 从而 $Tf=0$, 故

$$0=\langle x_0^{**},Tf\rangle=\langle f,x\rangle,$$

与 $\langle f, x\rangle \neq 0$ 矛盾. □

命题 2.5.26

设 X 是赋范空间, 则:

(1) 若 X 自反, 则 X^* 也自反.

(2) 若 X 是 *Banach* 空间, 则 X 自反当且仅当 X^* 自反.

证明. 留作习题. □

命题 2.5.27

设 X, Y 是赋范空间, X 与 Y 线性同构 (即存在双射 $T \in L(X, Y)$ 具有有界逆), 则 X 自反当且仅当 Y 自反.

证明. 由定理2.5.5的 (6) 以及 T 是线性同构知, T^* 也是线性同构, 从而 T^{**} 是 X^{**} 到 Y^{**} 的线性同构. 设 ϕ 是从 Y 到 Y^{**} 的自然嵌入映射. 若 Y 自反, 则对任意的 $x^{**} \in X^{**}$, 有

$$
\begin{aligned}
&\langle x^*, T^{-1}\phi^{-1}T^{**}x^{**}\rangle = \langle x^*T^{-1}, \phi^{-1}T^{**}x^{**}\rangle \\
=&\langle T^{**}x^{**}, x^*T^{-1}\rangle = \langle x^{**}, T^*x^*T^{-1}\rangle = \langle x^{**}, x^*\rangle, \quad \forall x^* \in X^*,
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式成立 (即 $x^* = T^*x^*T^{-1}$) 是因为

$$
\langle T^*x^*T^{-1}, x\rangle = \langle x^*T^{-1}, Tx\rangle = \langle x^*, x\rangle, \quad \forall x \in X.
$$

因此 X 是自反的. 此时证明了充分性, 必要性由 T^{-1} 是从 Y 到 X 的线性同构以及充分性可得. □

☞ **注**

设 X 上两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价, 则 $(X, \|\cdot\|_1)$ 自反当且仅当 $(X, \|\cdot\|_2)$.

定理 2.5.28: 商空间上的线性泛函

设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间, $\pi: X \to X/M$ 是自然映射. 则 π^* 是从 $(X/M)^*$ 到 ${}^{\perp}M$ 的等距同构映射.

证明. 任取 $y^* \in (X/M)^*$, 有

$$\langle \pi^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \pi x\rangle = 0, \quad \forall x \in M,$$

故 π^* 的确是 $(X/M)^*$ 到 ${}^{\perp}M$ 的映射.

还需证明 π^* 等距且是满射. 对于等距, 只需注意到对 $\forall y^* \in (X/M)^*$, 都有

$$\|\pi^* y^*\| = \sup_{x\in X} \left|\langle \pi^* y^*, x\rangle\right| = \sup_{x\in X} \left|\langle y^*, \pi x\rangle\right| = \sup_{y\in X/M} \left|\langle y^*, y\rangle\right| = \|y^*\|.$$

为了证明 π^* 是满射, 取 $x^* \in {}^{\perp}M$, 定义

$$\langle y^*, \pi x\rangle := \langle x^*, x\rangle, \quad \forall x \in X.$$

y^* 是良定义的, 因为如果 $\pi x_1 = \pi x_2$, 则 $x_1 - x_2 \in M$, 由于 $x^* \in {}^{\perp}M$, $\langle x^*, x_1\rangle = \langle x^*, x_2\rangle$. 不难证明 $y^* \in (X/M)^*$, 并且有 $\pi^* y^* = x^*$, 因此 π^* 是满射. □

定理 2.5.29: 共轭空间的商空间

设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间, 则 $X^*/{}^{\perp}M$ 与 M^* 等距同构.

证明. 记 ϕ 是 X^* 到 $X^*/{}^{\perp}M$ 的自然嵌入映射. 定义映射 $\sigma : X^*/{}^{\perp}M \to M^*, \phi(x^*) \to x^*\big|_M$. σ 是良定义的, 因为若 $\phi(x_1^*) = \phi(x_2^*)$, 则 $x_1^* - x_2^* \in M^{\perp}$, 从而 $x_1^*\big|_M = x_2^*\big|_M$. σ 显然是线性的, 它也是等距映射, 因为

$$\begin{aligned}
\|\phi(x^*)\| &= \inf_{y^*\in{}^{\perp}M} \|x^* - y^*\| = \inf_{y^*\in{}^{\perp}M} \sup_{x\in X, \|x\|=1} \left|\langle x^* - y^*, x\rangle\right| \\
&= \sup_{x\in X, \|x\|=1} \inf_{y^*\in{}^{\perp}M} \left|\langle x^* - y^*, x\rangle\right| = \sup_{x\in M, \|x\|=1} \inf_{y^*\in{}^{\perp}M} \left|\langle x^* - y^*, x\rangle\right| \\
&= \sup_{x\in M, \|x\|=1} \left|\langle x^*, x\rangle\right| = \left\|x^*\big|_M\right\|, \quad \forall x^* \in X^*,
\end{aligned}$$

其中第二行第二个等号成立是由于, 若 $x \notin M$, 则由 Hahn-Banach 定理 (定理2.4.9), 存在 $y^* \in {}^{\perp}M$ 使得 $\langle y^*, x\rangle = \langle x^*, x\rangle$.

最后证明 σ 是满射, 取 $m^* \in M^*$, 由 Hahn-Banach 定理 (定理2.4.6) 知存在 $x^* \in$

X^* 为 m^* 的保范延拓, 此时 $\sigma(\phi x^*) = m^*$, 故 σ 是满射. □

定理 2.5.30

设 X 是自反空间, M 是 X 的闭子空间, 则 X/M 是自反空间.

证明. 由于 X 是自反空间, 则 X 完备 (若 $\{x_n\}$ 是 X 中 Cauchy 列, 则 $\{\tau x_n\}$ 是 X^{**} 中 Cauchy 列, 而 X^{**} 完备, 因此收敛于 x^{**}, 而 X 自反, 所以 $x_n \to \tau^{-1}x^{**}$), 从而由定理1.5.19, X/M 也完备

根据命题2.5.26的 (1) 以及 X 自反知 X^* 也自反, 而 ${}^{\perp}M$ 是 X^* 的闭子空间, 由 Pettis 定理可得 ${}^{\perp}M$ 自反. 再根据命题2.5.27和定理2.5.28得 $(X/M)^*$ 自反, 最后再由命题2.5.26的 (2) 以及 X/M 是 Banach 空间知 X/M 自反. □

☞ **注**

商空间的自反性也可以推出闭子空间的自反性, 因为若 X 自反, M 是闭子空间, 则 X^* 自反, 从而由该定理可得 $X^*/{}^{\perp}M$ 自反, 从而由上一定理 M^* 自反, 从而 M 自反.

定理 2.5.31: Eberlein-Smulian 定理

设 X 是自反空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的有界列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $x \in X$ 使得 $x_{n_k} \rightharpoonup x$ (自反空间中的有界集弱列紧).

证明. 令 $X_0 = \overline{\operatorname{span}\{x_n\}_1^{\infty}}$, 由 Pettis 定理, X_0 也是自反的. 因此再由 X_0 是可分的, X_0^{**} 可分. 取 $z_n \in X_0^{**}$ 满足

$$\langle z_n, f\rangle = \langle f, x_n\rangle, \quad \forall f \in X_0^*.$$

则 $\{z_n\}$ 也是 X_0^{**} 中的有界列. 在 X_0^* 上应用定理2.5.17可得 $\{z_n\}$ 有子列 $\{z_{n_k}\}$ $*$ 弱收敛于 $z \in X_0^{**}$, 即

$$\langle z_{n_k}, f\rangle \to \langle z, f\rangle, \quad \forall f \in X_0^*.$$

因为 X_0 是自反的, 存在 $x \in X_0$ 使得 $\langle z, f\rangle = \langle f, x\rangle (\forall f \in X_0^*)$, 故

$$\langle f, x_{n_k}\rangle = \langle z_{n_k}, f\rangle \to \langle z, f\rangle = \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in X_0^*.$$

对 $g\in X^*$, $g_0=g|_{X_0}\in X_0^*$, 故也有

$$\langle g,x_{n_k}\rangle\to\langle g,x\rangle,\quad \forall g\in X^*.$$

因此 x_{n_k} 弱收敛于 x. □

定义 2.5.32: 弱列紧和 $*$ 弱列紧

设 X 为赋范空间. 若 $A\subset X$ 中任意点列都有收敛子列都有弱收敛子列, 则称 A 是**弱列紧的**. 若 $B\subset X^*$ 中任意点列都有 $*$ 弱收敛子列, 则称 B 是 $*$ **弱列紧的**.

☞ **注**

Eberlein-Smulian 定理说明自反空间中的单位球弱列紧.

此外, 自反空间中的单位闭球弱自列紧.

证明. 设 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\|\le 1(\forall n\ge 1)$. 则存在子列 $x_{n_k}\rightharpoonup x\in X$. 由 Hahn-Banach 定理 (推论2.4.7), 存在 $f\in X^*$ 使得

$$\|f\|=1\quad 且\quad f(x)=\|x\|.$$

则

$$\|x\|=f(x)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\le\limsup_{k\to\infty}\|f\|\cdot\|x_{n_k}\|\le 1,$$

因此单位闭球弱自列紧. □

定理 2.5.33: 自反空间中最佳逼近元的存在性

设 X 是自反空间, M 是 X 中的非空闭凸子集, 则 $\forall x\in X$, 存在 $y\in M$ 使得

$$\|x-y\|=\rho(x,M):=\inf_{z\in M}\|x-z\|.$$

证明. 不妨设 $x\in X\setminus M$, 否则是显然的. 由下确界定义知, 存在 $y_n\in M$ 使得 $\|x-y_n\|\to\rho(x,M)$. 不难证明 $\{y_n\}$ 是 X 中的有界列, 则由 X 自反以及定理2.5.31, 存在 $y\in X$ 以及子列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $y_{n_k}\rightharpoonup y$. 由 M 是闭凸集以及命题2.5.24, 有 $y\in M$.

此时必有 $\|x-y\|=\rho(x,M)$, 因为

$$\rho(x,M)\le\|x-y\|\le\liminf_{k\to\infty}\|x-y_{n_k}\|=\rho(x,M),$$

其中第二个不等号成立, 根据命题2.5.20以及 $x-y_{n_k}\rightharpoonup x-y$. □

定义 2.5.34: 一致凸

设 X 是赋范空间. 若 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x,y\in X$ 满足 $\|x\|,\|y\|\le1$ 并且 $\|x-y\|>\varepsilon$ 时, 都有

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1-\delta,$$

则称 X 是**一致凸空间**.

例 2.5.35

不难验证 $\mathbb{R}^2$ 上的 Euclidean 范数 $\|\cdot\|_2$ 是一致凸的, 但其等价范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 都不是一致凸的.

☞ **注**

一致凸空间必是严格凸的.

命题 2.5.36: 一致凸空间等价条件

设 X 是赋范空间, 则 X 一致凸的充要条件为: 对 $\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset X$,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1,\ \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2\implies\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0.$$

证明. 留作习题. □

例 2.5.37

内积空间是一致凸的.

证明. 设 X 是内积空间, 若有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1,\quad\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\left(2\|x_n\|^2+2\|y_n\|^2-\|x_n+y_n\|^2\right)=0,$$

故由上一命题, X 是一致凸空间. □

推论 2.5.38

设 X 是一致凸空间. 若 $\{x_n\}\subset X$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1 \quad 且 \quad \lim_{m,n\to\infty}\|x_n+x_m\|=2,$$

则 $\{x_n\}$ 是 *Cauchy* 列.

证明. 反设 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{m_k}\}$ 和 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\left\|x_{n_k}-x_{m_k}\right\|>\varepsilon_0, \quad \forall k\geq 1.$$

而显然有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k}\right\|=\lim_{k\to\infty}\left\|x_{m_k}\right\|=1 \quad 以及 \quad \lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k}+x_{m_k}\right\|=2,$$

故由一致凸空间的等价条件得 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x_{n_k}-x_{m_k}\right\|=0$, 矛盾. □

引理 2.5.39

设 X 为 *Banach* 空间, $f_1,\cdots,f_n\in X^*$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$, $\gamma>0$. 则对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $x_\varepsilon\in X$ 使得

$$f_i(x_\varepsilon)=\alpha_i(i=1,\cdots,n) \quad 以及 \quad \|x_\varepsilon\|<\gamma+\varepsilon$$

成立的充要条件为: 对任意的 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathbb{K}$, 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n\beta_i\alpha_i\right|\leq\gamma\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i\right\|$$

成立.

证明. 必要性: 给定 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathbb{K}$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\left|\sum_{i=1}^n\beta_i\alpha_i\right|=\left|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i(x_\varepsilon)\right|\le\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i\right\|\cdot\|x_\varepsilon\|\le(\gamma+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i\right\|,$$

再根据 ε 的任意性可得充分条件中不等式.

充分性: 不妨设 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关. 考虑映射

$$\varphi:X\to\mathbb{K}^n, x\mapsto(f_1(x),\cdots,f_n(x)).$$

φ 一定是满射, 若不然, $\dim R(\varphi)<n$, 则根据线性代数知识, 存在非零的 $(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ 使得

$$\sum_{i=1}^n y_i f_i(x)=0,\quad\forall x\in X,$$

与 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关矛盾. 根据开映射定理以及 φ 是满射可知 φ 是开映射. 记 $S_\varepsilon=\{x\in X:\|x\|<\gamma+\varepsilon\}$, 则由于 φ 是开映射, $\varphi(S_\varepsilon)$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中的开集.

反设不存在必要条件中的 x_ε, 则 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\notin\varphi(S_\varepsilon)$. 则由 Hahn-Banach 定理的第一几何形式, 存在 $\mathbb{K}^n$ 上的有界线性泛函 F 使得

$$|F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|\ge\operatorname{Re}F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\ge\sup_{x\in S_\varepsilon}\operatorname{Re}F\circ\varphi(x)=\sup_{x\in S_\varepsilon}\left|F\circ\varphi(x)\right|.$$

由 Euclidean 空间 $\mathbb{K}^n$ 的性质, 存在 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n$ 使得

$$F(y_1,\cdots,y_n)=\sum_{i=1}^n y_i\beta_i,\quad\forall(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{K}^n.$$

故

$$\gamma\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i\right\|\ge\left|\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i\right|\ge\left|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i(x)\right|,\quad\forall x\in S_\varepsilon.$$

但不等式右侧的上极限是 $(\gamma+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i f_i\right\|$, 矛盾. □

定理 2.5.40

设 X 是一致凸的 *Banach* 空间, 则 X 自反.

证明. 给定 $x_0^{**}\in X^{**}$, 不妨设 $\|x_0^{**}\|=1$. 对每个 $n\geq 1$, 存在 $x_n^*\in X^*$, $\|x_n^*\|=1$ 使得

$$\left|\langle x_0^{**},x_n^*\rangle\right|\geq \|x_0^{**}\|-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}.$$

在上面引理中取 $f_i=x_i^*,\alpha_i=\langle x_0^{**},x_i^*\rangle(1\leq i\leq n),\gamma=\|x_0^{**}\|=1$. 则对任意的 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathbb{K}$, 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n\beta_i\langle x_0^{**},x_i^*\rangle\right|=\left|\langle x_0^{**},\sum_{i=1}^n\beta_i x_i^*\rangle\right|\leq\left\|\sum_{i=1}^n\beta_i x_i^*\right\|$$

成立. 故若取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$, 存在 $x_n\in X$ 使得

$$\langle x_0^{**},x_i^*\rangle=\langle x_i^*,x_n\rangle(1\leq i\leq n)\quad\text{并且}\quad \|x_n\|\leq 1+\frac{1}{n}.$$

于是

$$1-\frac{1}{n}\leq\left|\langle x_0^{**},x_n^*\rangle\right|=\left|\langle x_n^*,x_n\rangle\right|\leq\|x_n\|\leq 1+\frac{1}{n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=1$. 再由

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq 2\left|\langle x_0^{**},x_n^*\rangle\right|=\left|\langle x_n^*,x_n+x_{n+p}\rangle\right|\leq\left\|x_n+x_{n+p}\right\|\leq 2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

可得 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m+x_n\|=2$. 故由一致凸空间等价条件的推论知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 而 X 完备, 故 $\{x_n\}$ 收敛, 记其极限为 x_0, 显然有 $\|x_0\|=1$. 在

$$\langle x_0^{**},x_i^*\rangle=\langle x_i^*,x_n\rangle,\quad 1\leq i\leq n$$

中令 $n\to\infty$ 可得 $\langle x_0^{**},x_i^*\rangle=\langle x_i^*,x_0\rangle(\forall i\geq 1)$.

下面证明 x_0 是满足

$$\|x_0\|=1\quad\text{且}\quad\langle x_0^{**},x_n^*\rangle=\langle x_n^*,x_0\rangle,\forall n\geq 2$$

的唯一点. 若不然, 存在不同于 x_0 的点 $x_0'\in X$ 也满足该性质, 则由 X 的严格凸性 (一

致凸必严格凸), $\|x_0+x_0'\|<2$. 但注意到

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right)\le 2\left|\langle x_0^{**},x_n^*\rangle\right| = \left|\langle x_n^*,x_0+x_0'\rangle\right|\le \left\|x_0+x_0'\right\|,\quad \forall n\ge 2,$$

故 $\left\|x_0+x_0'\right\|\ge 2$, 矛盾.

故 x_0 与 x_1^* 的选取无关, 而由 x_1^* 的定义知它可以取作 X^* 中任意范数为 1 的点, 因此 $\langle x_0^{**},x^*\rangle=\langle x^*,x_0\rangle,\forall x^*\in X^*$, 该式说明 X 自反. □

推论 2.5.41

Hilbert 空间均是自反的.

证明. 由 Hilbert 空间的完备性和一致凸性得到. □

定理 2.5.42

设 X 是一致凸的 *Banach* 空间, $x_n,x\in X,x_n\rightharpoonup x$ 并且

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n\|\le\|x\|,$$

则 $x_n\to x$.

证明. 由命题2.5.20, 还有 $\|x\|\le\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$, 故 $\|x_n\|\to\|x\|$. 不妨设 $x\ne 0$, 否则显然成立. 因为 $x_n\rightharpoonup x$ 并且 $\|x_n\|\to\|x\|\ne 0$, 故由

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\le\left|f(\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{x_n}{\|x\|})\right|+\left|f\left(\frac{x_n}{\|x\|}-\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\\ \le&\|f\|\cdot\|x_n\|\left|\frac{1}{\|x_n\|}-\frac{1}{\|x\|}\right|+\frac{1}{\|x\|}\left|f(x_n)-f(x)\right|\to 0,\quad\forall f\in X^*,\end{aligned}$$

故 $\frac{x_n}{\|x_n\|}\rightharpoonup\frac{x}{\|x\|}$, 因而

$$\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{x}{\|x\|}\rightharpoonup 2\frac{x}{\|x\|}.$$

由于

$$2=2\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|\le\liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{x}{\|x\|}\right\|\le\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{x}{\|x\|}\right\|\le 2,$$

故由一致凸空间的等价条件可得 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to \frac{x}{\|x\|}$, 因此根据

$$\begin{aligned}\|x_n - x\| &\le \left\| x_n - \frac{\|x\|}{\|x_n\|} x_n \right\| + \left\| \frac{\|x\|}{\|x_n\|} x_n - x \right\| \\ &= \big| \|x_n\| - \|x\| \big| + \|x\| \cdot \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\|\end{aligned}$$

可知 $x_n \to x$. □

定理 2.5.43

当 $1 < p < \infty$ 时, L^p 空间是一致凸空间, 进而是自反的.

证明. 当 $2 \le p < \infty$ 时, 有

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \le \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right), \quad \forall f, g \in L^p,$$

该不等式的证明留作习题.

当 $1 < p < 2$ 时, 有

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^q \le \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall f, g \in L^p,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 该不等式的证明也留作习题.

根据上面两个不等式以及一致凸空间的等价条件, 立即得到 $L^p(1 < p < \infty)$ 空间的一致凸性. □

定理 2.5.44

当 $1 < p < \infty$ 时, $\forall \varphi \in (L^p)^*$, 存在唯一的 $u \in L^q$ 使得

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \mathrm{d}\mu, \quad \forall f \in L^p,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 在此意义下, $(L^p)^* = L^q$.

☞ **注**

若测度 μ 是 σ 有限的, 则该定理对 $p = 1$ 也成立.

证明. 令 $T : L^q \to (L^p)^*$, 满足

$$\langle Tu, f\rangle := \int uf\mathrm{d}\mu, \quad \forall f \in L^p.$$

由 Holder 不等式,

$$\big|\langle Tu, f\rangle\big| \le \|u\|_q \cdot \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p,$$

故 T 是 L^q 到 $(L^p)^*$ 上的有界线性算子. 若取 $f_0 = \operatorname{sign}(u)\cdot|u|^{q-1}$, 则 $\|f_0\|_p^p = \|u\|_q^q$, 并且

$$\langle Tu, f_0\rangle = \|u\|_q^q = \|u\|_q \cdot \|f_0\|_p,$$

因此 $\|Tu\| = \|u\|_q$. 还需证明 T 是满射. T 是等距映射, 故 $R(T)$ 在 $(L^p)^*$ 中闭, 只需证明 $\overline{R(T)} = (L^p)^*$. 任取 $\psi \in (L^p)^{**}$ 使得 $\psi\big|_{R(T)} = 0$, 由于 $L^p(1 < p < \infty)$ 自反, 故存在 $\phi \in L^p$ 使得 $\psi = \tau\phi$(τ 是从 L^p 到 $(L^p)^{**}$ 的自然嵌入映射), 从而

$$0 = \langle\psi, Tu\rangle = \langle Tu, \phi\rangle = \int u\phi\mathrm{d}\mu, \quad \forall u \in L^q,$$

从而 $\phi = 0$, $\psi = 0$. 故 ${}^{\perp}R(T) = \{0\}$, $\overline{R(T)} = (L^p)^*$. □

推论 2.5.45

设 $1 < p < \infty$, 则 $L^p[a,b]$ 中 $f_n \rightharpoonup f$ 的充要条件为

$$\int_a^t f_n\mathrm{d}s \to \int_a^t f\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [a,b].$$

证明. 充分条件就是 $\langle\chi_{[a,t]}, f_n\rangle \to \langle\chi_{[a,t]}, f\rangle$, 因此由 $\overline{\operatorname{span}\{\chi_{[a,t]} : a \le t \le b\}} = L^p[a,b]$(阶梯函数在 $L^p[a,b]$ 中稠密) 立即得到. □

定理 2.5.46

在 $C[a,b]$ 中, $x_n \rightharpoonup x$ 的充要条件为

(1) $\{x_n\}$ 在 $C[a,b]$ 中有界;

(2) $\forall t \in [a,b]$, $x_n(t) \to x(t)$.

证明. 必要性: (1) 显然, (2) 由 $\langle\delta_t, x\rangle := x(t)$ 定义的 δ_t 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛, 因

此

$$\langle \delta_t, x_n \rangle = x_n(t) \to x(t) = \langle \delta_t, x \rangle, \quad \forall t \in [a,b].$$

充分性: 由 $\big(C[a,b]\big)^*$ 为有界变差函数空间 $BV[a,b]$ 以及 Lebesgue 控制收敛定理可得. □

2.5.4 作业

✍ **题目2.5.1.** 设 X 是复 Hilbert 空间, $T \in L(X)$, 证明 $T = T^* \iff (Tx, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$.

解答. 必要性: 由 $(Tx,x) = (x,Tx) = \overline{(Tx,x)} (\forall x \in X)$ 可得.

充分性: 任取 $x, y \in X$, 有

$$\begin{aligned} &(T(x+y), x+y) = \overline{(T(x+y), x+y)} = (x+y, T(x+y)) \\ \Longrightarrow\ &(Tx,y) + (Ty,x) = (x,Ty) + (y,Tx). \end{aligned}$$

将上式中的 y 改为 iy, 再整理可得 $(Tx,y) - (Ty,x) = (x,Ty) - (y,Tx)$, 将该式与上式相加即得 $(Tx,y) = (x,Ty)$.

✍ **题目2.5.2.** 设 X 是 Hilbert 空间, $T_1, T_2 \in L(X)$ 都是自伴算子, 则

$$T_1T_2 = T_2T_1 \iff (T_1T_2)^* = T_1T_2.$$

解答. 只需注意到 $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^* = T_2T_1$.

✍ **题目2.5.3.** 设 X 是 Hilbert 空间, $T \in L(X)$, 证明 $Ker(T^*) = R(T)^\perp$.

解答. $x \in Ker(T^*) \iff T^*x = 0 \iff (T^*x, y) = 0 (\forall y \in X) \iff (x, Ty) = 0 (\forall y \in X) \iff x \in R(T)^\perp$.

✍ **题目2.5.4.** 设 X 是赋范空间, M 是 X 的子空间, 证明 $({}^\perp M)^\perp = \overline{M}$.

解答. 由 $({}^\perp M)^\perp = \big\{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in X^*\ 且\ f\big|_M = 0\big\}$ 知 $M \subset ({}^\perp M)^\perp$, 而 $({}^\perp M)^\perp$ 还是闭子空间, 因此 $\overline{M} \subset ({}^\perp M)^\perp$. 若 $\overline{M} \neq ({}^\perp M)^\perp$, 则由 Hahn-Banach 定理知存在 $f \in {}^\perp M$ 以及 $x_0 \in ({}^\perp M)^\perp$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 但根据 $({}^\perp M)^\perp$ 的定义又有 $x_0 \notin ({}^\perp M)^\perp$, 矛盾.

✍ **题目2.5.5.** 设 X, Y 是赋范空间, $T \in L(X, Y)$, 证明:

$$Ker(T^*) = {}^{\perp}R(T), \quad Ker(T) = R(T^*)^{\perp}.$$

解答. $x^* \in Ker(T^*) \iff T^*x^* = 0 \iff \langle T^*x^*, y\rangle = 0 (\forall y \in Y) \iff \langle x^*, Ty\rangle = 0 (\forall y \in Y) \iff x^* \in {}^{\perp}R(T)$.

$x \in Ker(T) \iff Tx = 0 \iff \langle y^*, Tx\rangle = 0 (\forall y^* \in Y^*) \iff \langle T^*y^*, x\rangle = 0 (\forall y^* \in Y^*) \iff x \in R(T^*)^{\perp}$.

✍ **题目2.5.6.** 设 $X = \left\{\{x_n\} \subset l^2 : \|x\| < \infty\right\}$, 其中 $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 记 T 是从 X 到 l^2 的单位映射, 证明 $\overline{R(T)} = l^2$.

解答. 任取 $x \in X, y \in l^2$, 有 $(Tx, y)_{l^2} = (x, T^*y)_X$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \overline{x_n} (T^*y)_n,$$

故 $(T^*y)_n = \frac{y_n}{n^2}$. 从而 $Ker(T^*) = \{0\} \Longrightarrow \overline{R(T)} = Ker(T^*)^{\perp} = l^2$.

✍ **题目2.5.7.** 设 X 是自反的赋范空间, 证明 X^* 也自反.

解答. 记 τ 是从 X 到 X^{**} 的自然嵌入映射, 由于 X 自反, τ 是 X 到 X^{**} 的等距同构. 任取 $x^{***} \in X^{***}$, 则 $x^{***}\tau \in X^*$ 并且

$$\langle x^{**}, x^{***}\tau\rangle = \langle x^{***}\tau, \tau^{-1}x^{**}\rangle = \langle x^{***}, x^{**}\rangle,$$

因此 X^* 自反.

✍ **题目2.5.8.** 设 X 是 Banach 空间, 则 X 自反当且仅当 X^* 自反.

解答. 必要性: 由上题立即得到.

充分性: 若 X^* 自反, 则由必要性条件知 X^{**} 自反. 记 τ 是 X 到 X^{**} 的自然同构, 则由 X 是 Banach 空间可得 $\tau(X)$ 在 X^{**} 中闭. 根据 Pettis 定理, 自反空间的闭子空间也自反, 因此 τX 自反. 记 ϕ 是从 τX 到 $(\tau X)^{**}$ 的自然同构 (因为 τX 自反). 不难看出 $x^* \mapsto y^*$, $\langle y^*, \tau x\rangle := \langle x^*, x\rangle (x \in X)$ 是 X^* 到 $(\tau X)^*$ 的等距同构, 从而

$\psi: x^{**} \mapsto y^{**}, \langle y^{**}, y^{*}\rangle := \langle x^{**}, x^{*}\rangle (x^{*} \in X^{*})$ 是从 X^{**} 到 $(\tau X)^{**}$ 的等距同构. 故

$$\begin{aligned}\langle x^{**}, x^{*}\rangle &= \langle y^{**}, y^{*}\rangle = \langle y^{*}, \phi^{-1} y^{**}\rangle \\ &= \langle x^{*}, \tau^{-1}\phi^{-1} y^{**}\rangle = \langle x^{*}, \tau^{-1}\phi^{-1}\psi x^{**}\rangle,\end{aligned}$$

因此 X 也自反.

✍ **题目2.5.9.** 求证: $(l^p)^* = l^q \left(1 \le p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

解答. 令

$$T: l^q \to (l^p)^*, \{\alpha_n\} \mapsto f \quad \left(f(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right),$$

由课本习题 2.3.8 和课本习题 2.3.9, T 是良定义的并且保持范数. 还需证明 T 是满射. 设 $f \in l^q$, 令 $\{\alpha_n\} = \{f(e_n)\}$, 其中 e_n 是第 n 分量为 1 其余为 0 的点. $\forall \{x_n\} \in l^p$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = f(\{x_n\})$ 收敛, 因此再由课本习题 2.3.8 和课本习题 2.3.9, $\{\alpha_n\} \in l^q$ 且 $T\{\alpha_n\} = f$, T 是满射.

✍ **题目2.5.10.** 设 C 是收敛数列全体, 其上范数为 $\|\cdot\|_\infty$, 求证: $C^* = l^1$.

解答. 令

$$T: l^1 \to C^*, \alpha = \{\alpha_n\} \to f \quad \left(f(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right).$$

首先证明 T 是良定义的, 并且 $\|f\| = \|\alpha\|_1$. 注意到

$$\left|f(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right| \le \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|\alpha\|_1 \cdot \|x\|_\infty, \quad \forall x = \{x_n\} \in C,$$

因此 $\|f\| \le \|\alpha\|_1$. 记

$$x^{(m)} \in C_0 \subset C: \quad x_n^{(m)} = \begin{cases} \operatorname{sign}(\alpha_n), & n \le m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

则

$$f(x^{(m)}) = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n| \to \|\alpha\|_1, \quad m \to \infty,$$

因此 $\|f\| = \|\alpha\|_1$.

再证明 T 是满射. 对 $f \in C^*$, 令 $\alpha = \{\alpha_n\} = \{f(e^{(n)})\}$. 下面证明 $\alpha \in l^1$.

$$\left|f(x^{(m)})\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(m)} f(e^{(n)})\right| = \sum_{n=1}^{m} \left|f(e^{(n)})\right| = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n| \le \|f\| \cdot \|x^{(m)}\| = \|f\|,$$

故 $\alpha \in l^1$, 再根据 $T\alpha = f$ 知 T 是满射.

✍ **题目2.5.11.** 设 C_0 是收敛于 0 的数列全体, 其上范数为 $\|\cdot\|_\infty$, 求证: $C_0^* = l^1$.

解答. 与上题证明过程相同.

✍ **题目2.5.12.** 求证: 有限维赋范空间是自反的.

解答. 设 X 的一组基为 $x_1, \cdots, x_n$. 由习题 2.4.7, 存在 $f_1, \cdots, f_n \in X^*$ 使得 $f_i(x_j) = \delta_{ij} (1 \le i, j \le n)$. 任取 $f \in X^*, x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, 有

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, x_k \rangle f_k(x),$$

并且由于 $f_k (1 \le k \le n)$ 线性无关, 这种表示是唯一的, 因此 $f_1, \cdots, f_n$ 是 X^* 的一组基, $\dim X^* = n = \dim X$.

同理可得 $\dim X^{**} = \dim X^*$, 从而 $\dim X^{**} = \dim X$, 再由 $X \subset X^{**}$ 知 $X = X^{**}$.

✍ **题目2.5.13.** 设 X 是赋范空间, τ 是 X 到 X^{**} 的自然映射, 求证: $R(\tau)$ 是闭的当且仅当 X 完备.

解答. 必要性: 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 则 $\{\tau x_n\}$ 是 X^{**} 中的 Cauchy 列. 由 X^{**} 的完备性以及 $R(\tau)$ 是闭集, $\tau x_n \to \tau x \in R(\tau)$, 从而 $x_n \to x$, X 完备.

充分性: 设 $\tau x_n \to x^{**} \in X^{**}$, 则 $\{\tau x_n\}$ 是 X^{**} 中的 Cauchy 列, $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 根据 X 的完备性, $x_n \to x \in X$, 也即 $\tau x_n \to \tau x = x^{**} \in R(\tau)$, 因此 $R(\tau)$ 是闭的.

✍ **题目2.5.14.** 在 l^1 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots),$$

求证: $T \in L(l^1)$ 并求 T^*.

解答. 由

$$\|Tx\| = \|x\|, \quad \forall x \in l^1$$

可知 $T \in L(l^1)$ 并且 $\|T\| = 1$. 注意到

$$\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (Tx)_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} x_n, \quad \forall f \in l^\infty = (l^1)^*, x \in l^1,$$

故

$$T^* : l^\infty \to l^\infty, (f_1, f_2, \cdots) \mapsto (f_2, f_3, \cdots),$$

也即 T^* 是 l^∞ 上的左推移算子.

✍ **题目2.5.15.** 在 l^2 中定义算子

$$T : \{x_n\}_1^\infty \mapsto \left\{\frac{x_n}{n}\right\}_1^\infty,$$

求证: $T \in L(l^2)$ 并求 T^*.

解答. 由

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right) = \zeta(2)\|x\|, \quad \forall x \in l^2$$

可知 $T \in L(l^2)$ 并且 $\|T\| = \zeta(2)$. 注意到

$$(T^* x, y) = (x, Ty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n} = (Tx, y), \quad \forall x, y \in l^2$$

可得 $T^* = T$.

✍ **题目2.5.16.** 设 X, Y 是 Banach 空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 并且 $\forall g \in Y^*$, $g(Tx) \in X^*$, 求证: $T \in L(X, Y)$.

解答. 定义 $T^* : Y^* \to X^*, g \mapsto g(Tx)$, 则

$$\sup_{\substack{x^{**} \in R(\tau) \\ \|x^{**}\|=1}} \left\|(x^{**} \circ T^*)g\right\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left\|(T^* g)(x)\right\| < \infty, \quad \forall g \in Y^*,$$

由共鸣定理,

$$\sup_{\substack{x^{**}\in R(\tau)\\ \|x^{**}\|=1}}\ \sup_{\substack{g\in Y^*\\ \|g\|=1}} \left\|(x^{**}\circ T^*)(g)\right\| = \sup_{\substack{\|g\|=1\\ g\in Y^*}} \left\|T^*g\right\| = \left\|T^*\right\| < \infty,$$

故 $T^*\in L(Y^*,X^*)$, 从而 $\|T\|=\|T^*\|<\infty$, $T\in L(X,Y)$.

题目2.5.17. 设 H 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 的正交规范基, 求证: $x_n\rightharpoonup x_0$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\|$ 有界;

(2) $(x_n,e_k)\to(x_0,e_k),\quad \forall k\geq 1.$

解答. 必要性: 由 Banach-Steinhaus 定理易得.

充分性: 由 Riesz 表示定理, 只需证明 $(x_n,x)\to(x_0,x)(\forall x\in H)$. 记 M 是 $\|x_n\|$ 的一个上界.$\forall\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty}|(x,e_k)|^2} = \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty}(x,e_k)e_k\right\| < \frac{\varepsilon}{M+\|x_0\|}.$$

从而

$$\begin{aligned}
|(x_n-x_0,x)| &\leq \left|\left(x_n-x_0,\sum_{k=1}^{N}(x,e_k)e_k\right)\right| + \left|\left(x_n-x_0,\sum_{k=N+1}^{\infty}(x,e_k)e_k\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}|(x,e_k)|\cdot|(x_n-x_0,e_k)| + (M+\|x_0\|)\cdot\frac{\varepsilon}{M+\|x_0\|} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}|(x,e_k)|\cdot|(x_n-x_0,e_k)| + \varepsilon,
\end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$, 再由 ε 的任意性可知, $(x_n-x_0,x)\to 0$.

题目2.5.18. 设 S_n 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到自身的算子 $(1\leq p<\infty)$:

$$(S_nu)(x) = \begin{cases} u(x), & |x|\leq n, \\ 0, & |x|>n, \end{cases}$$

求证: $S_n \to I$ 但 $S_n \not\rightrightarrows I$.

解答. 任取 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|(I-S_n)u\|^p = \int_{|x|>n} |u(x)|^p \mathrm{d}x \to 0,$$

因此 $S_n \to I$. 但

$$\|I-S_n\| = \sup_{\|u\|=1} \left(\int_{|x|>n} |u(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \le 1,$$

对 $v = \chi_{n<|x|<2n}$, 取 $u = \frac{v}{\|v\|}$ 带入上式, 得 $\|I-S_n\| = 1$, 故 $S_n \not\rightrightarrows I$.

✍ **题目2.5.19**. 设 H 是 Hilbert 空间, $x_n \rightharpoonup x_0, y_n \to y_0$, 求证: $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

解答. 设 M 是 $\|x_n\|$ 的上界, 则

$$\begin{aligned}\left|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)\right| \le& \left|(x_n,y_n-y_0)\right| + \left|(x_n-x_0,y_0)\right| \\ \le& M\left\|y_n-y_0\right\| + \left|(x_n-x_0,y_0)\right|,\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 即可.

✍ **题目2.5.20**. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正交规范集, 求证: $e_n \rightharpoonup 0$ 但 $e_n \not\to 0$.

解答. 由 Bessel 不等式, $(e_n, x) \to 0 (\forall x \in H)$, 再由 Riesz 表示定理, $e_n \rightharpoonup 0$. 但 $\|e_n\| = 1 (\forall n)$, 故 $e_n \not\to 0$.

✍ **题目2.5.21**. 设 H 是 Hilbert 空间, 求证 $x_n \to x$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\| \to \|x\|$;

(2) $x_n \rightharpoonup x$.

解答. 必要性显然, 只需证明充分性. 注意到

$$(x_n - x, x_n - x) = (x_n, x_n) - 2\,\mathrm{Re}(x_n - x, x) - (x, x),$$

令 $n \to \infty$ 即可.

✍ **题目2.5.22**. 求证: 赋范空间中的闭凸集是弱闭的, 即若 M 是闭凸集, $\{x_n\} \subset M$ 且 $x_n \rightharpoonup x_0$, 则 $x_0 \in M$.

解答. 若 $x_n \rightharpoonup x_0$, 由 Mazur 定理, 存在 $\{x_n\}$ 的凸组合序列 $\{y_n\}$ 强收敛与 x_0, 而由 M 是闭集, $\{y_n\}\subset M$, 因此由 M 是闭集, $x_0\in M$.

✍ **题目2.5.23.** 设 X 是自反的 Banach 空间, M 是 X 中的有界闭凸集, $f\in X^*$, 求证: f 在 M 上达到最大值和最小值.

解答. 设 $\|x\|\le K(\forall x\in M)$, 则由

$$\left|f(x)\right|\le\left\|f\right\|\cdot\|x\|\le K\left\|f\right\|,\quad \forall x\in M$$

知 f 在 M 上的上确界和下确界均是有限值. 设 $x_n\in M$ 使得 $f(x_n)\to\alpha=\sup\limits_{x\in M}f(x)$, 由课本题目 2.5.20, $\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记弱极限为 x, 显然 $f(x)=\alpha$. 根据题目 2.5.21, $x\in M$, 因此 f 在 M 上能达到最大值, 同理也能达到最小值.

✍ **题目2.5.24.** 设 X 是自反的 Banach 空间, M 是 X 中的非空闭凸集, 求证: 存在 $x_0\in M$ 使得 $\|x_0\|=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$.

解答. 记 $d=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$, 任取 $y\in M$, 有 $\left\|y\right\|\ge d$. 令 $N=M\cap\overline{B}(0,\left\|y\right\|)$, 则 N 是有界闭凸集, 并且 $\inf\limits_{x\in N}\|x\|=d$. 取 $x_n\in N$ 使得 $\|x_n\|\to d$, 则由课本题目 2.5.20, $\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 弱极限为 x_0. 取 $f\in X^*$ 使得 $\left\|f\right\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$, 则

$$\|x_0\|=f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\le\lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k}\right\|=d.$$

由题目 2.5.21, $x_0\in N\subset M$, 因此还有 $\|x_0\|\ge d$, 故 $\|x_0\|=d$.

✍ **题目2.5.25.** 设 X 是赋范空间, 证明 X 一致凸的充要条件为: 对 $\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset X$,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\left\|y_n\right\|=1,\lim_{n\to\infty}\left\|x_n+y_n\right\|=2\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-y_n\right\|=0.$$

解答. 必要性: 设 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\left\|y_n\right\|=1,\lim_{n\to\infty}\left\|x_n+y_n\right\|=2.$$

注意到

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-x_n\right\|=|1-\|x_n\||\to 0,$$

同理有 $\left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-y_n\right\|\to 0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2.$$

任取 $\varepsilon>0$, $\delta>0$ 由一致凸定义所给出. 根据上式可知存在 $N>0$ 使得

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right\|\geq 1-\delta,\quad \forall n>N,$$

而 $\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\|=\left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|=1$, 故必有

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|\leq\varepsilon,\quad \forall n>N.$$

因此 $\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|\to 0$, 再根据 $\|x_n\|,\|y_n\|\to 1$ 不难得出 $\|x_n-y_n\|\to 0$.

充分性: 同样使用反证法, 反设 X 不是一致凸空间, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$ 满足

$$\|x_n\|\leq 1,\quad \|y_n\|\leq 1,\quad \|x_n-y_n\|>\varepsilon_0\quad 且\quad \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|\geq 1-\frac{1}{n},$$

由上式可得 $\|x_n\|,\|y_n\|\to 1$, $\|x_n+y_n\|\to 2$ 但是 $\|x_n-y_n\|\not\to 0$, 矛盾.

✍ **题目2.5.26.** 当 $p\geq 2$ 时, 证明:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\leq\frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right),\quad \forall f,g\in L^p.$$

证明. 首先证明 $a^p+b^p\leq(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}(\forall a,b>0)$. 不妨设 $b\geq a$, 令 $t=\frac{b}{a}$, 只需证 $x(t)=(1+t^2)^{\frac{p}{2}}-t^p-1\geq 0(\forall t\geq 1)$. 注意到 $x'(t)=pt((t^2+1)^{\frac{p}{2}+1}-t^{p-2})\geq 0(\forall\geq 1)$, 故 $x(t)\geq x(1)=2^{\frac{p}{2}}-2\geq 0$.

令 $a=\left|\frac{f+g}{2}\right|, b=\left|\frac{f-g}{2}\right|$, 再由 $x^{\frac{p}{2}}(x>0)$ 是凸函数 $(p\geq 2)$ 可得

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p+\left|\frac{f-g}{2}\right|^p\leq\left(\frac{|f|^2+|g|^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\leq\frac{|f|^p+|g|^p}{2},$$

对上式积分即可. □

✍ **题目2.5.27.** 当 $1<p<2$ 时, 有

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q\leq\left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}},\quad\forall f,g\in L^p,$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

解答. 注意到对 $0<x<1$, 有 Taylor 展式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big((1+x)^p+(1-x)^p\big)-(1+x^q)^{p-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2n-p)}{(2n-1)!}x^{2n}\left(\frac{1-x^{\frac{2n-p}{p-1}}}{\frac{2n-p}{p-1}}-\frac{1-x^{\frac{2n}{p-1}}}{\frac{2n}{p-1}}\right),\end{aligned}$$

而对每个给定的 $x\in(0,1)$, $\frac{1-x^r}{r}$ 是 $(0,\infty)$ 上关于 r 的单调递减函数, 因此以上级数中每一项均非负, 从而有不等式

$$\frac{1}{2}\big((1+x)^p+(1-x)^p\big)\geq(1+x^q)^{p-1},\quad\forall 0<x<1.$$

令 $x=\frac{1-c}{1+c}, c\in(0,1)$, 得

$$(1+c)^q+(1-c)^q\leq 2(1+c^p)^{q-1},\quad\forall 0<c<1.$$

从而有

$$|a+b|^q+|a-b|^q\leq 2\big(|a|^p+|b|^p\big)^{q-1},\quad\forall a,b\in\mathbb{R}.$$

注意到 $0<\frac{p}{q}<1$, 由反向 Minkowski 不等式, 对任意可测函数 u,v, 都有

$$\left(\int |u|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}}+\left(\int |v|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}}\le\left(\int |u+v|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}},$$

取 $u=\left|\frac{f+g}{2}\right|^q, v=\left|\frac{f-g}{2}\right|^q$, 得

$$\left(\int\left|\frac{f+g}{2}\right|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}}+\left(\int\left|\frac{f-g}{2}\right|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}}\le\frac{1}{2^q}\left(\int(|f+g|^q+|f-g|^q)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}},$$

在之前得到的不等式中取 $a=f,b=g$, 结合上式可得

$$\left(\int\left|\frac{f+g}{2}\right|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}}+\left(\int\left|\frac{f-g}{2}\right|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}}\le\left(\int\frac{1}{2}|f|^p+\frac{1}{2}|g|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}},$$

上式即为所求.

2.6 线性算子的谱

本节中如非特别说明, X 均指复 Banach 空间.

2.6.1 定义和例子

定义 2.6.1: 线性算子的谱与正则值

设 X 是复 Banach 空间, $T\in L(X)$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

(1) 若 $\lambda I-T$ 存在有界逆 (双射), 则 λ 称为 T 的**正则值**, 正则值全体称作 T 的**正则集**, 记为 $\rho(T)$. 此时, 称 $R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}$ 为 T 的**预解式**.

(2) 若 $\lambda\notin\rho(T)$, 则 λ 称为 T 的**谱点**, 全体谱点称作 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$. T 的谱点还分为三类:

a. 若存在非零的 $x\in X$ 使得 $(\lambda I-T)x=0$(即 $\lambda I-T$ 不是单射), 则称 λ 为 T 的**特征值**, x 称为 T 的**特征向量**或**特征元**, 特征值全体称为 T 的**点谱**, 记为 $\sigma_p(T)$ (point).

b. 若 $\lambda I-T$ 是单射, 并且 $\overline{R(\lambda I-T)}=X$, 则称 λ 为 T 的**连续谱点**, 连续谱点全体称作**连续谱**, 记为 $\sigma_c(T)$ (continuous).

c. 若 $\lambda I-T$ 是单射, 并且 $\overline{R(\lambda I-T)}\neq X$, 则称 λ 为 T 的**剩余谱点**, 剩余谱点全体称作**剩余谱**, 记为 $\sigma_r(T)$ (residual).

☞ **注**

根据定义显然有 $\mathbb{C}=\rho(T)\cup\sigma(T)$, $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$, 这些集合都是互不相交的.

根据线性代数知识, 有限维空间上线性算子均不存在连续谱和剩余谱, 因此这两类谱只存在于无穷维空间中.

☞ **注**

以上对有界线性算子谱的分类对闭算子同样适用, 但闭算子的谱更加复杂 (例如闭算子的谱未必是紧集), 本节不作讨论.

例 2.6.2

设 $X=C[0,1]$, $A:u(t)\mapsto t\cdot u(t)$. 则 $A\in L(X)$, 并且

$$\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1].$$

证明. 注意到

$$\|Au\|\leq\|u\|,\quad \forall u\in X,$$

故 $A\in L(X)$. 显然 $N(\lambda I-A)=\{0\}(\forall\lambda\in\mathbb{C})$.

若 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[0,1]$, 则 $\forall v\in X$, 对于 $u(t)=\frac{v(t)}{\lambda-t}\in C[0,1]$, 有 $(\lambda I-A)u=v$, 因此 $\lambda I-A$ 是双射, $\lambda\in\rho(A)$.

若 $\lambda\in[0,1]$, 由于 $N(\lambda I-A)=\{0\}$, λ 不是特征值. 并且当 $v\in R(\lambda I-A)$ 时, $v(\lambda)=0$, 因此 $1_{[0,1]}\notin\overline{R(\lambda I-A)}$, 故 $\lambda\in\sigma_r(A)$. □

例 2.6.3

设 $X = L^2[0,1]$, $A: u(t) \to tu(t)$. 则 $A \in L(X)$, 并且

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1].$$

证明. 注意到

$$\|Au\| \le \|u\|, \quad \forall u \in X,$$

故 $A \in L(X)$. 显然 $N(\lambda I - A) = \{0\}(\forall \lambda \in \mathbb{C})$.

若 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, 则 $\forall v \in X$, 对于 $u(t) = \frac{v(t)}{\lambda - t} \in L^2[0,1]$, 有 $(\lambda I - A)u = v$, 因此 $\lambda I - A$ 是双射, $\lambda \in \rho(A)$.

若 $\lambda \in [0,1]$, 由于 $N(\lambda I - A) = \{0\}$, λ 不是特征值. 并且任取 $v \in L^2[0,1]$, 记

$$u_n(t) = \begin{cases} 0, & \lambda - \frac{1}{n} \le t \le \lambda + \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{\lambda - t}, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 $u_n v \in L^2[0,1]$ 并且

$$\|v - (\lambda I - A)u_n v\|^2 = \int_{\lambda - \frac{1}{n}}^{\lambda + \frac{1}{n}} |v(t)|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

因此 $v \in \overline{R(\lambda I - A)}$, $\lambda \in \sigma_c(A)$. □

例 2.6.4

设 $X = L^1[0,1]$, $T: X \to X$,

$$(Tf)(t) = tf(t) + \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall f \in X.$$

则 $T \in L(X)$ 并且 $\sigma_p(T) = (0,1], \sigma_c(T) = \{0\}, \rho(T) = \mathbb{C} \setminus [0,1]$.

证明. 对 $f, g \in X$, 考虑 $(\lambda I - T)f = g$, 此即

$$(\lambda - t)f(t) - \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s = g(t), \quad t \in [0,1].$$

若 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, 此时记 $h(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$, 则

$$(\lambda - t)(f(t) - h(t)) - \int_t^1 (f(s) - h(s))\mathrm{d}s = \int_t^1 h(s)\mathrm{d}s.$$

记 $F(t) = f(t) - h(t)$, 求导得

$$(\lambda - t)F'(t) = -h(t), \quad F(1) = 0.$$

以上常微分方程显然存在唯一解 F, 从而此时 $\lambda \in \rho(T)$.

若 $\lambda \in [0,1]$, 考虑

$$(\lambda - t)f(t) = \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s.$$

由上式可知, f 在 $[0,\lambda)$ 和 $(\lambda,1]$ 上均为光滑函数. 对上式求导可得

$$(\lambda - t)f'(t) = 0 \implies f'(t) = 0, \quad t \in [0,\lambda) \cup (\lambda,1].$$

因此 $f = C_1\chi_{[0,\lambda)} + C_2\chi_{(\lambda,1]}$. 由于 $\int_\lambda^1 f(s)\mathrm{d}s = 0$, 故 $C_2 = 0$.

从而当 $\lambda \in (0,1]$ 时, $\lambda \in \sigma_p(T)$, 并且此时有特征向量 $\chi_{[0,\lambda)}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 由上述讨论可知 $-T$ 是单射. 考虑

$$-tf(t) - \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s = t^{-\frac{1}{2}},$$

此时 f 在 $(0,1]$ 上光滑, 对上式求导并整理可得

$$f'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{5}{2}}, t \in (0,1], \quad f(1) = -1.$$

解得 $f(t) = -\frac{1}{3}t^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \notin L^1[0,1]$. 因此 $t^{-\frac{1}{2}} \neq R(-T)$, 但是 $t^{-\frac{1}{2}} \in L^1[0,1]$. 因此 $-T$ 不是满射. 任取 $g \in C_c^\infty[0,1]$, 不难验证 $f(t) = -\frac{g(t)}{t} + \int_t^1 \frac{g(s)}{s^2}\mathrm{d}s \in L^1[0,1]$ 满足 $-Tf = g$, 因此 $C_c^\infty[0,1] \subset R(-T)$, 而 $C_c^\infty[0,1]$ 在 $L^1[0,1]$ 中稠密, 因此 $\overline{R(-T)} = X$, $0 \in \sigma_c(T)$. □

2.6.2 算子谱的相关性质

引理 2.6.5

设 X 是复 *Banach* 空间, $T \in L(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. 若 $|\lambda| > \|T\|$, 则 $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$, 并且满足

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \quad \text{以及} \quad \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

☞ **注**

若 $\|T\| < 1$, **则** $(I - T)^{-1} \in L(X)$ **并且满足**

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad \text{以及} \quad \left\|(I - T)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|T\|},$$

以上级数称为 Neumann 级数.

证明. 由于 X 是 Banach 空间, 故 $L(X)$ 也是 Banach 空间. 因此由

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ 收敛, 记其极限为 S, 有 $\|S\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$. 注意到

$$S(\lambda I - T) = (\lambda I - T)S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = I,$$

故 $(\lambda I - T)^{-1} = S \in L(X)$. □

定理 2.6.6

设 X 是复 *Banach* 空间, 则 $L(X)$ 中可逆 (双射) 算子全体是 $L(X)$ 中的开集.

证明. 设 $T \in L(X)$ 并且满足 $T^{-1} \in L(X)$. 则对任意的 $S \in L(X)$ 满足 $\|S - T\| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$, 有

$$S = T\big(I - T^{-1}(T - S)\big),$$

此时 $\|T^{-1}(T-S)\| \le \|T^{-1}\|\cdot\|T-S\| < 1$, 故由上一引理, $I-T^{-1}(T-S)$ 可逆, 因此 S 也可逆. 据此可得可逆算子全体在 $L(X)$ 中是开集. □

☞ 注

由上一引理还能得到 $S^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(T^{-1}(T-S)\right)^n T^{-1}$, **以及估计**

$$\|S^{-1}-T^{-1}\| = \|S^{-1}(T-S)T^{-1}\| \le \frac{\|T-S\|\cdot\|T^{-1}\|^2}{1-\|T^{-1}(T-S)\|}.$$

定理 2.6.7

设 X 是复 Banach 空间, $T\in L(X)$. 则 $\rho(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的开集.

☞ 注

该定理结合引理2.6.5可知, $\sigma(T)$ **是** $\mathbb{C}$ **中的紧集, 并且** $\sigma(T)\subset\{|\lambda|\le\|T\|\}$.

证明. 任取 $\lambda_0\in\rho(T)$, 则

$$\begin{aligned}\lambda I-T &= (\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)\\ &= (\lambda_0 I-T)(I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}).\end{aligned}$$

由引理2.6.5, 当 $|\lambda-\lambda_0| < \|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^{-1}$ 时, $\lambda I-T$ 可逆, 故 $\rho(T)$ 是开集. □

引理 2.6.8: 第一预解公式

设 $\lambda,\mu\in\rho(A)$, 则

$$R_{\lambda+h}(A)-R_\lambda(A) = -hR_{\lambda+h}(A)R_\lambda(A),$$

其中 $h=\mu-\lambda$.

证明. 对

$$(\lambda I-A)-((\lambda+h)I-A) = -hI$$

等式两侧分别左乘 $R_{\lambda+h}(A)$, 再右乘 $R_\lambda(A)$ 即可. □

定理 2.6.9

设 X 是复 Banach 空间, $T \in L(X)$. $R_\lambda(T)$ 是 $\rho(T)$ 上的算子值解析函数, 即满足

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{R_{\lambda+h}(T)-R_\lambda(T)}{h}$$

对 $\forall \lambda \in \rho(T)$ 均存在, 并且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}R_\lambda(T) = -R_\lambda(T)^2$.

证明. 首先注意到

$$\begin{aligned}
\|R_{\lambda+h}(T)\| &= \left\|(I+h(\lambda I-T)^{-1})^{-1}(\lambda I-T)^{-1}\right\| \\
&= \left\|(I+hR_\lambda(T))^{-1}R_\lambda(T)\right\| \\
&\le \left\|(I+hR_\lambda(T))^{-1}\right\|\cdot\|R_\lambda(T)\|.
\end{aligned}$$

当 $|h| < \frac{1}{2\|R_\lambda(T)\|}$, 有 $\|-hR_\lambda(T)\| < \frac{1}{2}$, 因此根据引理2.6.5,

$$\|R_{\lambda+h}\| \le \left\|(I+hR_\lambda(T))^{-1}\right\|\cdot\|R_\lambda(T)\| \le \frac{\|R_\lambda(T)\|}{1-\|-hR_\lambda(T)\|} \le 2\|R_\lambda(T)\|.$$

由第一预解公式, 此时

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\left\|\frac{R_{\lambda+h}(T)-R_\lambda(T)}{h}+R_\lambda(T)^2\right\| = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\left\|R_\lambda(T)^2-R_{\lambda+h}(T)R_\lambda(T)\right\| \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\left\|hR_{\lambda+h}(T)R_\lambda(T)^2\right\| \le \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} 2|h|\|R_\lambda(T)\|^3 = 0,
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\dfrac{R_{\lambda+h}(T)-R_\lambda(T)}{h} = -R_\lambda(T)^2$. □

定理 2.6.10

对复 Banach 空间 $X \neq \{0\}$ 的任意有界线性算子 T, $\sigma(T) \neq \varnothing$.

证明. 任取 $f \in \left(L(X)\right)^*$, 由

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(R_{\lambda+h}(T)) - f(R_\lambda(T))}{h} = f\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{R_{\lambda+h}(T) - R_\lambda(T)}{h}\right)$$

知 $f(R_\lambda(T))$ 是 $\lambda \in \rho(T)$ 上的解析函数.

反设 $\sigma(T) = \varnothing$, 即 $\rho(T) = \mathbb{C}$. 此时由引理2.6.5, 当 $|\lambda| \geq 2\|T\|$ 时,

$$\|R_\lambda(T)\| = \left\|\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} \leq \frac{1}{\|T\|},$$

再由连续性, $R_\lambda(T)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 因此 $f(R_\lambda(T))$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 由 Louville 定理, $f(R_\lambda(T))$ 是常值函数, 也即 $f(R_\lambda(T) - R_0(T)) = 0(\forall f \in \left(L(X)\right)^*, \lambda \in \mathbb{C})$. 由推论2.4.10可得 $R_\lambda(T) = R_0(T)(\forall \lambda \in \mathbb{C})$, 从而

$$(\lambda I - T)^{-1} = (-T)^{-1} \Longrightarrow -T = \lambda I - T \Longrightarrow \lambda I = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

与 $X \neq \{0\}$ 矛盾. □

2.6.3 谱半径和 Gelfand 定理

定义 2.6.11: 谱半径

设 X 是复 Banach 空间, $T \in L(X)$, 称

$$r_\sigma(T) \triangleq \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

为 T 的**谱半径**.

☞ **注**

右边上确界能取到是因为 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集.

定理 2.6.12: Gelfand 定理

设 X 是 Banach 空间, $T \in L(X)$, 则

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

第一步.

$$r_\sigma(T) \geq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

证明. 记 $a = r_\sigma(T)$. 任取 $f \in \big(L(X)\big)^*$, 由于 $a+\varepsilon \in \rho(T)$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|f(T^n)\right|}{(a+\varepsilon)^{n+1}} < \infty,$$

因此

$$\sup_{n\geq 1}\left|f\left(\frac{T^n}{(a+\varepsilon)^{n+1}}\right)\right| < \infty, \quad \forall f \in \big(L(X)\big)^*.$$

由共鸣定理, 存在 M 使得

$$\frac{\|T^n\|}{(a+\varepsilon)^{n+1}} \leq M(\forall n) \implies \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}(a+\varepsilon)^{1+\frac{1}{n}}(\forall n),$$

取上极限再由 ε 的任意性可得. □

第二步.

$$\lambda^n \in \rho(T^n) \implies \lambda \in \rho(T).$$

证明. 若 $\lambda^n \in \rho(T^n)$, 记

$$S = P_\lambda(T)(\lambda^n I - T^n)^{-1} = (\lambda^n I - T^n)P_\lambda(T), \quad P_\lambda(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^{n-1-k}.$$

则由 $P_\lambda(T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)P_\lambda(T) = \lambda^n I - T^n$ 知

$$S(\lambda I - T) = (\lambda I - T)S = I,$$

因此 $S = (\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T)$. □

第三步.

$$r_\sigma(T) \le \liminf_{n\to\infty} \left\| T^n \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

证明. 由引理2.6.5, 显然有 $r_\sigma(T) \le \|T\|$. 因此 $r_\sigma(T^n) \le \|T^n\|$. 若 $\lambda^n > \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, $|\lambda^n| > \|T^n\|$, 则 $\lambda^n \in \rho(T^n)$, 由第三步, $\lambda \in \rho(T)$. 因此

$$r_\sigma(T) \le \left\| T^n \right\|^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \ge 1,$$

在上式中取下极限即可. □

第四步.

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \left\| T^n \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

证明. 由第一步和第三步

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| T^n \right\|^{\frac{1}{n}} \le r_\sigma(T) \le \liminf_{n\to\infty} \left\| T^n \right\|^{\frac{1}{n}},$$

上极限小于等于下极限, 因此极限存在并且等于 $r_\sigma(T)$. □

2.6.4 作业

✍ **题目2.6.1**. 设 A 是闭线性算子, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \sigma_p(A)$ 两两互异, x_i 是对应于 λ_i 的特征元. 求证: $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关.

解答. 若 $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$, 则分别左乘 $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j (\alpha_i x_i) = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

上述线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异, 上述行列式非零, 故 $\alpha_i x_i = 0(i=1,2,\cdots,n) \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \implies x_1,\cdots,x_n$ 线性无关.

✍ **题目2.6.2.** 在双边 $l^2(\mathbb{Z})$ 空间 (从 $-\infty$ 到 ∞) 上, 考察右推移算子

$$A : x \mapsto Ax, \quad (Ax)_n = x_{n-1}(\forall n \in \mathbb{Z}).$$

求证: $\sigma_c(A) = \sigma(A) =$ 单位圆周.

解答. 显然 $\|A\| = 1$, 故当 $|\lambda| > 1$ 时 $\lambda \in \rho(A)$. 并且 $\left\|A^{-1}\right\| = 1$, $0 < |\lambda| < 1$ 时 $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A^{-1})$, 从而由 $\lambda I - A = -\lambda(\lambda^{-1} I - A^{-1})A$ 知此时 $\lambda \in \rho(A)$.

当 $|\lambda| = 1$ 时, 若 $x \neq 0$ 但 $Ax = \lambda x$, 设 $x_m \neq 0$, 则

$$x_{n-1} = \lambda x_n(\forall n \in \mathbb{Z}) \implies x_{m-n} = \lambda^n x_m(\forall n \in \mathbb{Z}) \implies \|x\| = \infty,$$

矛盾. 因此 λ 不是特征值. 由于 $l^2(\mathbb{Z})$ 是 Hilbert 空间, 要证明 $\overline{R(\lambda I - A)} = l^2$ 只需证 $R(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\}$. 为此, 只需注意到

$$\begin{aligned} & x \in R(\lambda I - A)^{\perp} \iff (x, (\lambda I - A)y) = 0(\forall y \in l^2(\mathbb{Z})) \\ \iff & \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(\overline{\lambda}\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}) = 0(\forall y \in l^2(\mathbb{Z})) \\ \iff & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\overline{\lambda} x_n - x_{n+1})\overline{y}_n = 0(\forall y \in l^2(\mathbb{Z})) \\ \iff & ((\overline{\lambda} I - A^{-1})x, y) = 0(\forall y \in l^2(\mathbb{Z})) \\ \iff & (\overline{\lambda} I - A^{-1})x = -\overline{\lambda}^{-1} A^{-1}(\overline{\lambda} I - A)x = 0 \\ \iff & (\overline{\lambda} I - A)x = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

✍ **题目2.6.3.** 在 l^2 上考察左推移算子

$$A:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_2,x_3,\cdots).$$

求证: $\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\},\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$, 并且

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A).$$

解答. 显然 $\|A\|=1$, 故当 $|\lambda|>1$ 时 $\lambda\in\rho(A)$.

当 $|\lambda|<1$ 时, $x_\lambda=(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)$ 是关于 λ 的特征值, 因此 $\lambda\in\sigma_p(A)$.

当 $|\lambda|=1$ 时, 若 $Ax=\lambda x$, 则

$$x_{n+1}=\lambda x_n(\forall n\geq 1)\implies x_n=\lambda^{n-1}x_1(\forall n\geq 1)\implies\sum_{n=1}^{\infty}|x_1|<\infty\implies x=0.$$

因此 λ 不是特征值. 此外,

$$\begin{aligned}x\in R(\lambda I-A)^{\perp}&\iff(x,(\lambda I-A)y)=0(\forall y\in l^2)\\ &\iff\sum_{n=1}^{\infty}x_n(\overline{\lambda}\overline{y}_n-\overline{y}_{n+1})=0(\forall y\in l^2)\\ &\iff\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\lambda}x_n-x_{n-1})\overline{y}_n=0(\text{其中}x_0=0,\forall y_n\in l^2),\end{aligned}$$

在上式中令 $y_n=\overline{\lambda}x_n-x_{n-1}(\forall n\geq 1)$, 则 $\overline{\lambda}x_n=x_{n-1}(\forall n\geq 1)$, 从而 $x_n=\overline{\lambda}^{1-n}x_1$, 由 $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_1|$ 知 $x=0$, 从而 $R(\lambda I-A)^{\perp}=\{0\}$, $\overline{R(\lambda I-A)}=l^2$, $\lambda\in\sigma_c(A)$.

第三章 紧算子

3.1 紧算子的定义和基本性质

定义 3.1.1: 紧算子

设 X, Y 是 Banach 空间, A 是从 X 到 Y 的线性算子. 若 $\overline{A(B_1)}$ 在 Y 中是紧集 (B_1 是 X 中的单位球), 则称 A 是**紧算子**. 从 X 到 Y 的紧算子全体记作 $\mathfrak{C}(X,Y)$, 当 $X=Y$ 时, 记作 $\mathfrak{C}(X)$.

命题 3.1.2: 紧算子等价定义

设 X, Y 是 Banach 空间, A 为从 X 到 Y 的线性算子. 则以下三点等价:

(1) $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$;

(2) $\forall$ 有界集 $B \subset X$, $\overline{A(B)}$ 在 Y 中是紧集;

(3) $\forall$ 有界点列 $\{x_n\} \subset X$, $\{Ax_n\} \subset Y$ 有收敛子列.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 设 $\|x\| \le r (\forall x \in B)$, 则 $A(B) \subset A(rB) = rA(B)$. 由 $\overline{A(B)}$ 是紧集可知, $A(B)$ 是列紧的, 从而 $RA(B)$ 也是列紧的, $A(B)$ 是列紧的, 从而 $\overline{A(B)}$ 是自列紧的, 也即 $\overline{A(B)}$ 是紧集.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 取 $B = \{x_n\}$, 则由 $\overline{A}(B)$ 紧知 $A(B)$ 列紧, 即 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 任取 $\{x_n\} \subset B_1$, $\{x_n\}$ 有界, 从而有收敛子列, 故 $A(B_1)$ 是列紧的, 即 $\overline{A(B_1)}$ 是紧集. □

例 3.1.3

有限维赋范空间到其本身的线性算子都是紧算子, 因为此时 $\overline{A(B_1)}$ 是有界闭集, 而有限维赋范空间中有界闭集和紧集等价.

例 3.1.4

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $K \subset C(\Omega \times \Omega)$, 取 $X = Y = C(\Omega)$. 若记

$$T : u \mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \quad \forall u \in C(\Omega),$$

则 $T \in \mathfrak{C}(X)$.

证明. 记 $B = \{u \in C(\Omega) : \|u\| \le 1\}$ 只需证 TB 在 $C(\Omega)$ 中列紧. 记 $M = \sup\limits_{x,y\in\Omega} |K(x,y)| < \infty$, 注意到

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y\right| \le M \cdot m(\Omega)\|u\| \le M \cdot m(\Omega), \quad \forall u \in B,$$

因此 TB 是一致有界的. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|K(x_1,y) - K(x_2,y)| \le \frac{\varepsilon}{m(\Omega)}, \quad \forall |x_1 - x_2| \le \delta, x_1, x_2, y \in \Omega.$$

从而对 $\forall |x_1 - x_2| \le \delta, x_1, x_2 \in \Omega$, 有

$$\left|\int_\Omega K(x_1,y)u(y)\mathrm{d}y - \int_\Omega K(x_2,y)u(y)\mathrm{d}y\right| \le \frac{\varepsilon}{m(\Omega)} \cdot m(\Omega) \cdot \|u\| \le \varepsilon, \quad \forall u \in B,$$

因此 TB 还是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理, TB 列紧. $\square$

定理 3.1.5: 紧算子的性质

设 X, Y, Z 是 Banach 空间.

(1) $\mathfrak{C}(X,Y) \subset L(X,Y)$.

(2) $A, B \in \mathfrak{C}(X,Y), \alpha, \beta \in \mathbb{K} \implies \alpha A + \beta B \in \mathfrak{C}(X,Y)$.

(3) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 在 $L(X,Y)$ 中闭.

(4) 设 $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$, X_0 是 X 的闭线性子空间, 则 $A|_{X_0} \in \mathfrak{C}(X_0, Y)$.

(5) 若 $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 则 $R(A)$ 可分.

(6) 若 $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$, 且 A 和 B 中有一个是紧算子, 则 $BA \in \mathfrak{C}(X,Z)$.

(7) 若 X 是无穷维 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 A 没有有界逆.

证明. (1) 由有界线性算子将有界集映到有界集, 紧算子将有界集映到列紧集, 并且列紧集有界得到.

(2) 只需注意到列紧集 E_1, E_2 的线性组合 $\alpha E_1 + \beta E_2$ 还是列紧集.

(3) 设 $\{A_n\} \subset \mathfrak{C}(X, Y), A \in L(X, Y)$ 且 $A_n \rightrightarrows A$. 由于 Y 是 Banach 空间, 要证 $\overline{A(B_1)}$ 是紧集, 只需证 $A(B_1)$ 完全有界. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 n 使得 $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $A_n(B_1)$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网 $y_1, \cdots, y_m$. 当 $x \in B_1$ 时, 存在 k 使得 $\left\|A_n x - y_m\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 再由

$$\|Ax - A_n x\| \le \|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

知

$$\left\|Ax - y_m\right\| \le \|Ax - A_n x\| + \left\|A_n x - y_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $y_1, \cdots, y_m$ 是 $A(B_1)$ 的有穷 ε 网, $A(B_1)$ 完全有界.

(4) 注意到 $A(B_1 \cap X_0) \subset A(B_1)$, 因此由后者列紧, 前者也列紧.

(5) 由于 $A(B_1)$ 是列紧的, 故是完全有界的, 从而由定理1.3.12(完全有界集可分)知 $A(B_1)$ 可分. 再根据

$$R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B_1)$$

得 $R(A)$ 可分.

(6) 由有界线性算子将有界集映为有界集, 将列紧集映为列紧集, 并且紧算子将有界集映到列紧集得到.

(7) 反设 A 存在有界逆, 则由 $A(B_1)$ 是列紧的, $B_1 = A^{-1}A(B_1)$ 也是列紧的, 但无穷维空间中的单位球不可能列紧, 矛盾. □

例 3.1.6

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $K(x, y)$ 是 Ω 上的二元函数, 在 $x \neq y$ 时连续, 并且存在 $\alpha \in [0, n)$ 和 $M > 0$ 使得

$$\left|K(x, y)\right| \le M\left|x - y\right|^{-\alpha}, \quad \forall x, y \in \Omega, x \neq y.$$

则

$$T: u \mapsto \int_{\Omega} K(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \quad \forall u \in C(\Omega)$$

是良定义的线性算子, 并且 $T \in \mathfrak{C}(X)$, 其中 $X = C(\Omega)$.

证明. 首先证明 T 良定义, 即例子中的积分有意义. 为此, 只需注意到对任意的 $u \in C(\Omega), x \in \Omega$, 都有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left|K(x,y)u(y)\right|\mathrm{d}y \leq & M\|u\| \int_{\Omega} |x-y|^{-\alpha}\mathrm{d}y \leq M\|u\| \int_{B(x,r)} |x-y|^{-\alpha}\mathrm{d}y \\
= & M\|u\| \int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} |x-y|^{-\alpha}\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}\rho \\
= & M\|u\| \int_0^r m(\partial B(0,1))\rho^{n-1-\alpha}\mathrm{d}\rho \\
= & \frac{M\|u\| r^{n-\alpha} m(\partial B(0,1))}{n-\alpha} < \infty,
\end{aligned}$$

其中 $r = \mathrm{diam}(\Omega) := \sup\limits_{x,y\in\Omega} |x-y|$. 由上式也不难得出 $T \in L(X)$.

记 $k_m(t) = (2mt-1)\chi_{[\frac{1}{2m},\frac{1}{m}]}(t) + \chi_{(\frac{1}{m},\infty)}(t), m \geq 1$. 记 $K_m(x,y) = k_m(|x-y|)K(x,y)$ $(x,y \in \Omega)$, 则 $K_m \in C(\Omega\times\Omega)$. 定义

$$T_m: u \mapsto \int_{\Omega} K_m(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \quad u \in C(\Omega),$$

则由例3.1.4, $T_m \in \mathfrak{C}(X)$. 给定 $u \in C(\Omega)$ 满足 $\|u\| = 1$, 任取 $x \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned}
& |Tu(x) - T_m u(x)| = \left|\int_{\Omega} (K(x,y) - K_m(x,y))u(y)\mathrm{d}y\right| \\
= & \int_{\Omega\cap B(x,\frac{1}{m})} \left(1-k_m(|x-y|)\right)\left|K(x,y)u(y)\right|\mathrm{d}y \leq \int_{B(x,\frac{1}{m})} \left|K(x,y)\right|\mathrm{d}y \\
\leq & M \int_{B(x,\frac{1}{m})} |x-y|^{-\alpha}\mathrm{d}y = \frac{M\cdot m(\partial B(0,1))}{n-\alpha}\left(\frac{1}{m}\right)^{n-\alpha} \to 0, \quad m \to \infty,
\end{aligned}$$

从而 $\|T-T_m\| \to 0$, 由上一定理, $\mathfrak{C}(X)$ 在 $L(X)$ 中闭可知 $T \in \mathfrak{C}(X)$. □

命题 3.1.7

设 X, Y 是 Banach 空间. 若 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 则只要 $x_n \rightharpoonup x$, 就有 $Ax_n \to Ax$. 若 X 还是自反的, 则反之也成立.

证明. 若 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 反设 A 不是全连续算子, 也即存在 $x_n \rightharpoonup x$, 满足对子列有 (不妨设还是 $\{x_n\}$)

$$\|Ax_n - Ax\| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

由于 $\{x_n\}$ 弱收敛, 故有界. 再由 A 是紧算子, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $Ax_{n_k} \to y \in Y$. 注意到

$$\langle y^*, Ax_n - Ax \rangle = \langle A^* y^*, x_n - x \rangle \to 0, \quad \forall y^* \in Y^*,$$

从而 $Ax_n \rightharpoonup Ax$. 由于还有 $A_{n_k} \to y$, 故 $y = Ax$ 且 $Ax_{n_k} \to Ax$, 矛盾.

若 X 还是自反的, A 满足只要 $x_n \rightharpoonup x$, 就有 $Ax_n \to Ax$. 则由 Eberlein-Smulian 定理 (定理2.5.31) 知单位球 B_1 是弱列紧的, 再由 A 的条件知 A 将弱列紧集映为列紧集, $A(B_1)$ 是列紧的, 从而 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$. □

定理 3.1.8

$T \in \mathfrak{C}(X, Y) \iff T^* \in \mathfrak{C}(Y^*, X^*)$.

证明. 必要性: 记 Y^* 中的单位球为 U_1^*. 将 U_1^* 看作 $C(\overline{TB_1})$ 的子集 (由 $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$ 知 $\overline{TB_1}$ 是紧集). 注意到

$$\left\|y^*\right\|_{C(\overline{TB_1})} = \sup_{y \in \overline{TB_1}} \left|y^*(y)\right| \leq \sup_{y \in \overline{TB_1}} \left\|y^*\right\| \cdot \|T\| \leq \|T\|, \quad \forall y^* \in U_1^*,$$

以及对 $\forall y^* \in U_1^*, y_1, y_2 \in \overline{TB_1}$, 都有

$$\left\|y^*(y_1) - y^*(y_2)\right\| \leq \left\|y^*\right\| \cdot \left\|y_1 - y_2\right\| \leq \left\|y_1 - y_2\right\|,$$

故 U_1^* 一致有界且等度连续, 由 Arzela-Ascoli 定理, U_1^* 在 $C(\overline{TB_1})$ 中列紧. 从而任取

$\{y_n^*\} \subset U_1^*$, 存在子列 $\{y_{n_k}^*\}$ 和 $y^* \in U_1^*$ 使得

$$\begin{aligned}\left\|T^* y_{n_k} - T^* y\right\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \left|\langle T^* y_{n_k}^* - T^* y^*, x\rangle\right| = \sup_{\|x\|\le 1} \left|\langle y_{n_k}^* - y^*, Tx\rangle\right| \\ &= \sup_{y\in TB_1} \left|\langle y_{n_k}^* - y^*, y\rangle\right| \le \left\|y_{n_k}^* - y^*\right\|_{C(\overline{TB_1})} \to 0.\end{aligned}$$

从而 $T^* U_1^*$ 列紧.

充分性: 根据必要性, 若 $T^* \in \mathfrak{C}(Y^*, X^*)$, 则 $T^{**} \in \mathfrak{C}(X^{**}, Y^{**})$. 记 τ 为 X 到 X^{**} 的自然映射. 由于 X 是 Banach 空间, 因此 $\tau(X)$ 是 X^{**} 的闭子空间, 从而 $S = T^{**}\big|_{\tau(X)} \in \mathfrak{C}(\tau(X), Y)$, 因此 $T = S \circ \tau \in \mathfrak{C}(X, Y)$. □

定义 3.1.9: 有穷秩算子

设 $T \in L(X, Y)$. 若 $R(T)$ 是有限维的, 则称 T 是**有穷秩算子**. 有穷秩算子全体记作 $F(X, Y)$.

☞ **注**

由于有界线性算子将有界集映为有界集, 而有限维空间的有界集就是列紧集, 因此有 $F(X, Y) \subset \mathfrak{C}(X, Y)$.

定理 3.1.10: 紧算子的逼近

设 X 是无穷维可分 *Hilbert* 空间, $\{e_n\}$ 是完备标准正交系, $T \in \mathfrak{C}(X)$. 记

$$S_N x := \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n, \quad x \in X,$$

则 $S_N T \in F(X)$ 并且 $\|T - S_N T\| \to 0$, 从而 $\overline{F(X)} = \mathfrak{C}(X)$.

证明. 给定 $T \in \mathfrak{C}(X)$ 和 $\varepsilon > 0$. 由于 $\overline{T(B_1)}$ 是紧集, 存在有穷 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网 $\{y_1, \cdots, y_m\}$. 又由 $\{e_n\}$ 是完备标准正交系, 存在 $N_0 > 0$ 使得对任意的 $N > N_1$ 都有

$$\left\|y_j - S_N y_j\right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

故对任意的 $\|x\| = 1$, 存在 y_j 使得 $\left\|Tx - y_j\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$, 因此结合以上不等式以及 $\|S_N\| \le$

1(由 Bessel 不等式可得), 有

$$\begin{aligned}
&\|Tx-(S_NT)x\| \le \left\|Tx-y_j\right\| + \left\|y_j-S_Ny_j\right\| + \left\|S_N(y_j-Tx)\right\| \\
\le &\left\|Tx-y_j\right\| + \left\|y_j-S_Ny_j\right\| + \left\|y_j-Tx\right\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon, \quad \forall N>N_0,
\end{aligned}$$

上式即 $\|T-S_NT\|<\varepsilon$, 因此 $\|T-S_NT\|\to 0$. □

例 3.1.11

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$. 则

$$T: u\mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \quad u\in L^2(\Omega)$$

是 $X:=L^2(\Omega)$ 上良定义的线性算子, 并且 $T\in\mathfrak{C}(X)$.

解答. 由

$$\begin{aligned}
&\|Tu\| = \left(\int_\Omega\left|\int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12} \\
\le &\left(\int_\Omega\left(\int_\Omega|K(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)\left(\int_\Omega|u(y)|^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac12} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\cdot\|u\|
\end{aligned}$$

知 T 是良定义的, 并且 $T\in L(X)$. 由于 X 是可分 Hilbert 空间, 存在 X 的完备标准正交系 $\{e_k\}$. 则 $\{e_k(x)e_l(y)\}$ 是 $L^2(\Omega\times\Omega)$ 的完备标准正交系, 因为首先,

$$\left\|e_k(x)e_l(y)\right\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \int_\Omega\int_\Omega\left|e_k(x)e_l(y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|e_k\|\cdot\|e_l\| = 1.$$

其次, 对 $k\ne i, l\ne j$, 有

$$\left(e_k(x)e_l(y), e_i(x)e_j(y)\right)_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \int_\Omega\int_\Omega e_k(x)e_l(y)e_i(x)e_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (e_k,e_i)(e_l,e_j)=0.$$

最后, 若 $f(\cdot,\cdot)\in L^2(\Omega\times\Omega)$ 并且 $(f,e_k(x)e_l(y))_{L^2(\Omega)}=0(\forall k,l\ge 1)$, 则

$$(f,e_k(x)e_l(y))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega\left(\int_\Omega f(x,y)e_k(x)\mathrm{d}x\right)e_l(y)\mathrm{d}y = (f_k,e_l)=0, \quad \forall k,l\ge 1,$$

其中 $f_k(y) := \int_\Omega f(x,y)e_k(x)\mathrm{d}x \in X$. 由于 $\{e_k\}$ 是 X 的完备正交系, 故上式可得 $f_k \equiv 0(\forall k \geq 1)$. 若记 $f_y(x) := f(x,y)$, 则 $f_k(y) = (f_y, e_k) = 0(\forall k \geq 1)$, 从而 $f_y \equiv 0(\forall y \in \Omega)$, 故 $f \equiv 0$.

综合以上三点可知, $\{e_k(x)e_l(y)\}$ 是 $L^2(\Omega\times\Omega)$ 中的完备标准正交系. 从而存在数列 $\{\alpha_{kl}\}$ 使得在 L^2 范数意义下

$$K = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kl}e_ke_l.$$

记

$$K_m = \sum_{k,l=1}^{m} \alpha_{kl}e_ke_l,$$

并与题中类似定义 T_m, 则 $T_m \in F(X)$, 并且对任意的 $u \in X$), 有

$$\|T_mu - Tu\| = \left(\int_\Omega \left|\int_\Omega (K(x,y) - K_m(x,y))u(y)\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|K - K_m\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \cdot \|u\| \to 0,$$

因此 $\|T_m - T\| \to 0$, $T \in \mathfrak{C}(X)$.

3.2 Riesz-Fredholm 理论

定理 3.2.1

设 X 是 Banach 空间. 若 $T \in L(X)$, 则 $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

证明. 只需证明 $\rho(T) = \rho(T^*)$.

若 $\lambda \in \rho(T)$, 则 $\lambda I - T$ 是双射. 根据 Banach 逆算子定理, 只需证明 $\lambda I^* - T^*$ 是双射, 就有 $\lambda \in \rho(T^*)$. 设 $(\lambda I^* - T^*)x^* = 0$, 则 $\forall x \in X$,

$$\langle(\lambda I^* - T^*)x^*, (\lambda I - T)^{-1}x\rangle = \langle x^*, (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}x\rangle = \langle x^*, x\rangle = 0,$$

故 $x^* = 0$, $\lambda I - T^*$ 是单射. 任取 $y^* \in X^*$, 取 $x^* = (\lambda I - T)^{-1}y^*$, 则 $\forall x \in X$,

$$\langle(\lambda I^* - T^*)^*x^*, x\rangle = \langle x^*, (\lambda I - T)x\rangle = \langle y^*, (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)x\rangle = \langle y^*, x\rangle,$$

故 $(\lambda I^* - T^*)x^* = y^*$, $\lambda I^* - T^*$ 是满射. 因此 $\rho(T) \subset \rho(T^*)$.

若 $\lambda \in \rho(T^*)$, 则由于 $\rho(T^*) \subset \rho(T^{**})$, $\lambda I^{**} - T^{**}$ 是双射, 从而 $\lambda I - T = (\lambda I^{**} - T^{**}) \circ \tau$ 是双射, 其中 τ 是 X 到 X^{**} 的自然映射. 故 $\rho(T^*) \subset \rho(T)$. □

定理 3.2.2

设 X 是 Banach 空间. 若 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 $T = I - A$ 是闭值域算子 (即 $R(T)$ 是闭的).

证明. 令

$$\tilde{T} : X/N(T) \to R(T), x + N(T) \to Tx.$$

则 $\tilde{T}$ 是线性双射. 下面证明 $\tilde{T}^{-1} \in L(R(T), X/N(T))$. 反设 $\tilde{T}^{-1}$ 不是连续的, 则存在 $\{x_n\}$ 使得

$$\|Tx_n\| < \frac{1}{n} \quad 但 \quad \|x_n + N(T)\| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

令 $y_n + N(T) = \frac{x_n + N(T)}{\|x_n + N(T)\|}$, 则 $\|y_n + N(T)\| = 1$ 且 $Ty_n \to 0$. 不妨设 $\|y_n\| < 2$, 则由于 A 是紧算子, 存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $Ay_{n_k} \to z \in X$. 再由 $Ty_n = y_n - Ay_n \to 0$ 可得 $y_{n_k} \to z$. 而 $Ty_{n+k} \to 0$, 因此 $Tz = 0 \implies z \in N(T)$, 故

$$\|y_{n_k} + N(T)\| = \|y_{n_k} - z + N(T)\| \leq \|y_{n_k} - z\| \to 0,$$

与 $\|y_{n_k} + N(T)\| = 1$ 矛盾. 因此 $\tilde{T}^{-1}$ 是连续线性算子.

由于 $\tilde{T}$ 是单射闭算子, 故 $\tilde{T}^{-1}$ 是闭算子, 而 $\tilde{T}^{-1}$ 也是连续线性算子, 故定义域 $R(T)$ 为闭集. □

定理 3.2.3

设 X 是 Banach 空间. 若 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A, N(T) = \{0\}$, 则 $R(T) = X$.

证明. 反设 $R(T) \neq X$, 则存在 $x_0 \notin R(T)$. 记 $X_0 = X, X_k = T(X_{k-1})(k \geq 1)$. 由于 T 是单射, 故 $T^{k-1}x_0 \notin X_k$, 从而

$$X_0 \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \cdots.$$

由 Riesz 引理 (引理1.5.11), 存在 $y_k \in X_k$ 使得

$$\|y_k\| = 1 \quad 且 \quad \rho(y_k, X_{k+1}) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall k \geq 1.$$

注意到 $Ty_n+y_{n+p}-Ty_{n+p}\in X_{k+1}$, 故

$$\|Ay_n-Ay_{n+p}\|=\|y_n-(Ty_n+y_{n+p}-Ty_{n+p})\|\geq\frac{1}{2},\quad\forall n,p\geq 1,$$

从而 $\{Ay_n\}$ 没有收敛子列, 与 A 是紧算子矛盾. □

引理 3.2.4

设 X 是 Banach 空间. 若 $T\in L(X)$, 则 $\overline{R(T)}=N(T^*)^{\perp}=\{x\in X: f(x)=0,\forall f\in N(T^*)\}$.

证明. 设 $Tx\in R(T)$, 则 $\forall f\in N(T^*), f(Tx)=(T^*f)x=0$, 故 $R(T)\subset N(T^*)^{\perp}$. 再由 $N(T^*)^{\perp}$ 是闭集, $\overline{R(T)}\subset N(T^*)^{\perp}$.

设 $\overline{R(T)}\neq N(T^*)^{\perp}$, 取 $x_0\in N(T^*)\setminus\overline{R(T)}$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f\in X^*$ 使得

$$f(x_0)>0,\quad f(Tx)=0,\quad\forall x\in X.$$

由于 $(T^*f)x=f(Tx)=0(\forall x\in X)$, 故 $T^*f=0\implies f\in N(T^*)$. 再由 $x_0\in N(T^*)^{\perp}$, 有 $f(x_0)=0$, 矛盾. □

定理 3.2.5: Riesz-Fredholm 定理

设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathfrak{C}(X), T=I-A$, 则

(1) $\dim N(T)=\dim N(T^*)<\infty$.

(2) $R(T)=N(T^*)^{\perp}=\{x\in X: f(x)=0,\forall f\in N(T^*)\}$,

$R(T^*)={}^{\perp}N(T)=\{f\in X^*: f(x)=0,\forall x\in N(T)\}$.

证明. (1) 的证明分为四步.

第一步. 若 $A\in\mathfrak{C}(X), T=I-A$, 则

$$\dim N(T)<\infty\quad 且\quad \dim N(T^*)<\infty.$$

从而 $N(T)=\mathrm{span}\{x_i\}_1^n, N(T^*)=\mathrm{span}\{f_j\}_1^m$.

证明. 注意到

$$N(T)\cap B_1=\{x\in X:\|x\|\leq 1\ 且 x=Ax\}\subset A(B_1),$$

因此由 A 是紧算子, $A(B_1)$ 列紧, 从而 $N(T)\cap B_1$ 列紧, 而其本身是闭集, 故 $N(T)$ 中的单位球 $N(T)\cap B_1$ 是紧集, $N(T)$ 是有限维空间.

由定理3.1.8, A^* 也是紧算子, 从而同理可得 $N(T^*)$ 是有限维空间. □

第二步. 对第一步中的 $x_1,\cdots,x_n$, 存在 X 的闭线性子空间 X_1 使得

$$X=\text{span}\{x_k\}_1^n\oplus X_1.$$

证明. 由题目 2.4.7, 存在 $g_1,\cdots,g_n\in X^*$ 使得 $f_i(x_j)=\delta_{ij}(1\le i,j\le n)$. 令 $X_0=\bigcap\limits_{i=1}^{n}N(g_i)$ 为闭线性子空间, 满足 $x_j\notin X_0(j=1,\cdots,n)$, 并且

$$x-\sum_{i=1}^{n}g_i(x)x_i\in X_1,\quad \forall x\in X,$$

从而 $X=\text{span}\{x_k\}_1^n\oplus X_1$. □

第三步. 对第一步中的 $f_1,\cdots,f_m\in X^*$, 存在 $y_1,\cdots,y_m\in X\setminus R(T)$ 使得

$$f_i(y_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,m.$$

证明. 记 $F(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))^T:X\to\mathbb{K}^n$, 首先证 F 是满射. 考虑在 $\mathbb{K}^n$ 上考虑内积 $(x,y)=\overline{x}^Ty$. 由于 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关, 注意到

$$\begin{aligned}y\perp F(X)\iff \overline{y}^TF(x)=0(\forall x\in X)\iff \sum_{k=1}^{n}\overline{y_k}f_k(x)=0(\forall x\in X)\\ \iff \sum_{k=1}^{n}\overline{y_k}f_k=0\iff y_1=\cdots=y_n=0\iff y=0,\end{aligned}$$

其中 $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$. 因此 $F(X)^\perp=\{0\}$, 由于 $F(X)$ 必为有限维线性空间, 此即 $F(X)=\mathbb{K}^n$.

由于 F 是满射, 因此存在 y_k 使得 $F(y_k)=e_k(1\le k\le m)$, 此时 $y_1,\cdots,y_m\in X$ 满足 $f_i(y_j)=\delta_{ij}(i,j=1,\cdots,m)$. 若某个 $y_k\in R(T)$, 即存在 z_k 使得 $Tz_k=y_k$, 由于 $f_k\in N(T^*)$, 故 $f_k(y_k)=f_k(Tz_k)=(T^*f_k)(z_k)=0$, 矛盾. 因此 $y_1,\cdots,y_m\in X\setminus R(T)$. □

第四步. $\dim N(T)=\dim N(T^*)$.

证明. 需要证明对第一步中的 m 和 n 相等. 首先, 假设 $n<m$. 由第二步和第三步, 考虑映射

$$\tilde{T}: X=N(T)\oplus X_1 \to \operatorname{span}\{y_k\}_1^n \oplus R(T), \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i + y \mapsto \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i + Ty.$$

不难证明 $I-\tilde{T}$ 是紧算子, 并且 $\tilde{T}$ 是单射, 故由定理3.2.3可知 $R(\tilde{T})=X$, 但 $y_m \notin R(\tilde{T})$, 矛盾. 因此 $\dim N(T)\geq \dim N(T^*)$.

同样可以得到 $\dim N(T^*)\geq \dim N(T^{**})$, 而 $\dim N(T^{**})\geq \dim N(T)$, 联立以上不等式可得. □

(2) $R(T)=N(T^*)^{\perp}$ 由引理3.2.4和定理3.2.2得到.

由 (1) 的第四步可知, $\dim N(T^{**})=\dim N(T)$, 而 $N(T)\subset N(T^{**})$, 故 $N(T)=N(T^{**})$. 从而

$$R(T^*)=N(T^{**})^{\perp}={}^{\perp}N(T),$$

以上涉及 X 和 X^{**} 时在等距同构意义下讨论. □

3.2.1 作业

✍ **题目3.2.1.** 设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathfrak{C}(X)$, $T=I-A$ 是单射. 若 $R(T)\subsetneqq X$, 证明 $R(T^2)\subsetneqq R(T)$.

3.3 Riesz-Schauder 理论

定理 3.3.1

设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathfrak{C}(X)$, 则

(1) $\sigma(A)$ 要么是有限集, 要么是只以 0 为聚点的可数集. 此外, $\sigma(A)\setminus\{0\}=\sigma_p(A)\setminus\{0\}$, 并且当 $\dim X=\infty$ 时, $0\in\sigma(A)$.

(2) A 和 A^* 对应于同一个特征值的特征向量构成的子空间具有相同的有限维数.

(3) A 和 A^* 对应于不同特征值的特征向量正交.

证明. (1) 首先证明 $\sigma(A)\setminus\{0\}=\sigma_p(A)\setminus\{0\}$. 若 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\notin\sigma_p(A)$, 则 $\lambda I-A$ 为单射. 由定理3.2.3, $\lambda I-A$ 也是满射, 从而 $\lambda\in\rho(A)$.

接着证明当 $\dim X=\infty$ 时, $0\in\sigma(A)$. 反设 $0\notin\sigma(A)$, 则 $A^{-1}\in L(X)$, 从而 $I=AA^{-1}\in\mathfrak{C}(X)$, 从而 $I(\overline{B}(0,1))=\overline{B}(0,1)$ 是紧集, 与 X 是无穷维的矛盾.

最后证明 $\sigma(A)$ 要么有限, 要么可数且以 0 为聚点. 由于 $\sigma(A)\setminus\{0\}\sigma_p(A)\setminus\{0\}$, 故只需对 $\sigma_p(A)$ 证明该论断.

设 $\lambda_n\in\sigma_p(A)\setminus\{0\}$ 且 $\lambda_n\to\lambda\neq 0$. 取 x_n 为 λ_n 的单位特征元, 由课本习题 2.6.2, $\{x_n\}_1^\infty$ 线性无关. 记 $E_n=\operatorname{span}\{x_k\}_1^n$, 由 Riesz 引理, 存在 $y_{n+1}\in E_{n+1}$ 使得

$$\|y_{n+1}\|=1 \quad 且 \quad \rho(y_{n+1},E_n)\geq\frac{1}{2},\quad \forall n\geq 1.$$

由于 $\lambda_n\to\lambda\neq 0$, 故 $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ 有界, 根据 A 是紧算子, $\left\{\frac{Ay_n}{\lambda_n}\right\}$ 有收敛子列. 但注意到

$$y_{n+p}+\frac{Ay_n}{\lambda_n}-\frac{Ay_{n+p}}{\lambda_{n+p}}\in E_{n+p+1},$$

因此

$$\left\|\frac{Ay_{n+p}}{\lambda_{n+p}}-\frac{Ay_n}{\lambda_n}\right\|=\left\|y_{n+p}-\left(y_{n+p}+\frac{Ay_n}{\lambda_n}-\frac{Ay_{n+p}}{\lambda_{n+p}}\right)\right\|\geq\rho(y_{n+p},E_{n+p})\geq\frac{1}{2},$$

矛盾.

故如果 $\sigma_p(T)$ 有无穷多个元素, 则由于它是 $\mathbb{C}$ 中的有界集, 故至少有一个聚点, 由上一段论述可知该聚点只能是 0.

(2) 即 Riesz-Fredholm 定理 (定理3.2.5) 的 (2).

(3) 设 x 是 T 对应于特征值 λ 的特征向量, x^* 是 T^* 对应于特征值 λ' 的特征向量, 并且 $\lambda\neq\lambda'$. 则

$$\lambda\langle x^*,x\rangle=\langle x^*,\lambda x\rangle=\langle x^*,Tx\rangle=\langle T^*x^*,x\rangle=\lambda'\langle x^*,x\rangle,$$

故 $(\lambda-\lambda')\langle x^*,x\rangle=0$, 从而 $\langle x^*,x\rangle=0$. □

3.4 Hilbert-Schmidt 定理

引理 3.4.1

设 H 是 *Hilbert* 空间, $A\in L(H)$ 并且 A 是自伴算子, 则

$$\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|=\|A\|.$$

注

若 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界自伴算子, 并且 $(Th,h)=0(\forall h\in H)$, 则 $T=0$.

设 H 是复 Hilbert 空间, $T\in L(H)$. 若 $(Th,h)=0(\forall h\in H)$, 则 $T=0$(因为复 Hilbert 空间上 $(Th,h)\in\mathbb{R}(\forall h\in H)$ 可以推出 T 自伴).

证明. 记 $c=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$, 显然有 $c\le\|A\|$. 另一方面, 注意到对 $\forall\|x\|=\|y\|=1$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Ax,y)=&\frac{1}{4}\Big((A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\Big)\\ \le&\frac{c}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\le c,\end{aligned}$$

并且 $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1}\mathrm{Re}(Ax,y)=\|A\|$, 因此 $\|A\|\le c$. □

例 3.4.2

由上一引理可知,

(1) $\sup\limits_{\|f\|_{L^2[0,1]}=1}\left|\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right|=\sup\limits_{\|f\|_{L^2[0,1]}=1}\left|(x,f)_{L^2[0,1]}\right|=\|x\|_{L^2[0,1]}$.

(2) $\sup\limits_{\|f\|_{L^2[0,1]}=1}\left|\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\right|=\sup\limits_{\|f\|_{L^2[0,1]}=1}\left|(Tf,f)_{L^2[0,1]}\right|=\|T\|$, 其中 $(Tf)(x):=xf(x)$.

定理 3.4.3

若 A 是对称紧算子, 则必有 $x_0\in H,\|x_0\|=1$, 使得

$$(Ax_0,x_0)=\sup_{\|x\|=1}(Ax,x),$$

并且满足

$$Ax_0 = \lambda x_0,$$

其中 $\lambda = (Ax_0, x_0)$.

☞ **注**

由该定理, $\|A\| \in \sigma_p(A)$ 和 $-\|A\| \in \sigma_p(A)$ 至少有一个成立.

若令 $A \mapsto -A$, 则将定理中的 sup 改为 inf 同样成立, 因此存在 $\|x_0\| = 1$ 使得 $|(Ax_0, x_0)| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|$.

证明. 不妨设 $A \neq 0$, 因为 $A = 0$ 时定理显然成立.

记 $\lambda = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$. 取 $\|x_n\| = 1$ 使得 $(Ax_n, x_n) \to \lambda$. 由于 $\|x_n\| = 1$, 因此存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 $x_0 \in H$. 再由 A 是紧算子, $Ax_{n_k} \to Ax_0$, 从而 $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \to (Ax_0, x_0) = \lambda$.

下面证明 $\|x_0\| = 1$. 由于 H 上的单位闭球是弱自列紧的, 因此 $\|x_0\| \le 1$. 若 $\|x_0\| < 1$, 则

$$\lambda = (Ax_0, x_0) \le \lambda \|x_0\|^2 < \lambda,$$

矛盾.

最后证明 $Ax_0 = \lambda x_0$. 令

$$\varphi_x(t) = \frac{(A(x_0 + tx), x_0 + tx)}{(x_0 + tx, x_0 + tx)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

由于 $(Ax_0, x) = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, 因此

$$\varphi_x'(0) = 2\Big(\mathrm{Re}(Ax_0, x) - (Ax_0, x_0)\,\mathrm{Re}(x_0, x)\Big) = 0, \quad \forall x \in H.$$

此即

$$\mathrm{Re}(Ax_0 - \lambda x_0, x), \quad \forall x \in H,$$

因此 $Ax_0 = \lambda x_0$. □

定理 3.4.4: Hilbert-Schmidt 定理

若 A 是 Hilbert 空间 H 上的对称紧算子, 则至多有可数个非零的, 只可能以 0 为聚点的实数 λ_i, 它们是算子 A 的特征值. 并对应一组完备标准正交系 e_i, 使得

$$x = \sum (x, e_i) e_i,$$

$$Ax = \sum \lambda (x, e_i) e_i.$$

证明. $\forall \lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$, 记 $N(\lambda I - A)$ 的完备标准正交系为

$$\{e_i^{(\lambda)}\}_1^{m(\lambda)}, \quad m(\lambda) \triangleq \dim N(\lambda I - A) < \infty,$$

其中 $m(\lambda) < \infty$ 由 Riesz-Fredholm 定理可知. 此外, 若 $0 \in \sigma_p(A)$, 则记 $N(A)$ 的完备标准正交系为 $\{e_i^{(0)}\}$, 否则令 $\{e_i^{(0)}\} = \varnothing$. 记

$$\{e_i\} \triangleq \{e_i^{(0)}\} \cup \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \{e_i^{(\lambda)}\}_1^{m(\lambda)}.$$

再令 $M \triangleq \operatorname{span}\{e_i\}$.

还需证明 $\overline{M} = H$. 若不然, 则 $M^\perp \neq \{0\}$. 记 $\triangleq A|_{M^\perp}$, 由定义, $\tilde{A}$ 没有特征值, 但上一定理说明 A 必然有特征值, 矛盾. □

若将 A 的特征值按照正负排列起来, 则可以记作

$$\lambda_1^- \le \lambda_2^- \le \cdots < 0 \le \cdots \le \lambda_2^+ \le \lambda_1^+.$$

定理 3.4.5: 极小极大刻画

设 A 是 Hilbert 空间 H 上的对称紧算子, 对应有特征值

$$\lambda_1^- \le \lambda_2^- \le \cdots < 0 \le \cdots \le \lambda_2^+ \le \lambda_1^+,$$

则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^{\perp}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^{\perp}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)},$$

其中 E_{n-1} 是 H 的任意 $n-1$ 维闭线性子空间.

证明. 只需证关于 λ_n^+ 的等式 (令 $A \mapsto -A$ 即可得到 λ_n^- 的等式). 记 λ_n^+ 的等式右端为 μ_n.

首先证明 $\lambda_n^+ \le \mu_n$. $\forall E_{n-1}$, 取非零的 $x_n \in \operatorname{span}\{e_k^+\}_1^n$ 使得 $x_n \perp E_{n-1}$, 则

$$\sup_{x \perp E_{n-1}, x \neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \ge \frac{(Ax_n,x_n)}{(x_n,x_n)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^+ \left|a_j^+\right|^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_j^+\right|^2} \ge \lambda_n^+,$$

从而 $\lambda_n^+ \le \mu_n$.

接下来证明 $\lambda_n^+ \ge \mu_n$. 事实上, 若取 $E_{n-1} = \operatorname{span}\{e_k^+\}_1^{n-1}$, 则

$$\lambda_n^+ = \sup_{x \perp E_{n-1}, x \neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)},$$

因此 $\lambda_n^+ \ge \mu_n$. □

推论 3.4.6

若 Hilbert 空间 H 上的两个对称紧算子 A, B 满足

$$(Ax,x) \le (Bx,x), \quad \forall x \in H,$$

则

$$\lambda_j^+(A) \le \lambda_j^+(B) \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

证明. 由上一定理立即得到. □

第四章 广义函数与 Sobolev 空间

4.1 广义函数的概念

4.1.1 磨光算子及其逼近

定义 4.1.1

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, u 是 $\overline{\Omega}$ 上的函数, 称

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x\in\Omega : u(x)\neq 0\}}$$

为 u 的关于 Ω 的**支集**. 对整数 $0\le k\le\infty$, $C_0^k(\Omega)$ 表示支集在 Ω 内紧的全体 $C^k(\overline{\Omega})$ 函数所组成的集合.

☞ **注**

显然有 $C_0^\infty(\Omega)\subset\cdots\subset C_0^2(\Omega)\subset C_0^1(\Omega)\subset C_0^0(\Omega)$.

下面的例子表明 $C_0^\infty(\Omega)$ 是非空的.

例 4.1.2

记

$$j(x) := \begin{cases} C\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1,\end{cases}$$

其中 C 是使得 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)\mathrm{d}x=1$ 的常数. 则 $\operatorname{supp} j=\overline{B}(0,1)$ 并且 $j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对 $\delta>0$, 记 $j_\delta(x)=\delta^{-n}j(\delta^{-1}x)$, 则 $j_\delta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} j_\delta=\overline{B}(0,\delta)$ 并且

$\int_{\mathbb{R}^n} j_\delta(x)\mathrm{d}x = 1.$

定理 4.1.3

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, u 是 Ω 上的可积函数并且在 Ω 的一个紧子集 K 外恒为 0. 则对充分小的 $\delta > 0$, 函数

$$u_\delta(x) := \int_\Omega u(y) j_\delta(x-y)\mathrm{d}y$$

是 $C_0^\infty(\Omega)$ 的函数.

证明. 记 $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \le \delta\}$, 便有当 δ 足够小时, $K_\delta \subset \Omega$ 并且 $u_\delta(x) = 0(\forall x \notin K_\delta)$. 而

$$\partial^\alpha u_\delta(x) = \int_\Omega u(y)\partial^\alpha j_\delta(x-y)\mathrm{d}y, \quad \forall x \in K_\delta.$$

这是因为, 对指标 $\alpha_0 = (1,0,\cdots,0)$,

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha_0} u_\delta(x) &= \lim_{h\to 0}\int_\Omega \frac{j_\delta(x+he_1-y) - j_\delta(x-y)}{h}\cdot u(y)\mathrm{d}y \\ &= \lim_{h\to 0}\int_\Omega \partial^{\alpha_0} j_\delta(x+\theta he_1 - y)u(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\theta = \theta(x,y) \in (0,1), e_1 = (1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n$. 利用 j_δ 的连续可微性, 存在常数 M_{α_0} 使得

$$\left|\partial^{\alpha_0} j_\delta(z)\right| \le M_{\alpha_0}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

再应用 Lebesgue 控制收敛定理, 即得

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha_0} u_\delta(x) &= \int_\Omega \lim_{h\to 0}\partial^{\alpha_0} j_\delta(x+\theta he_1 - y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega \partial^{\alpha_0} j_\delta(x-y)u(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

逐次应用上述步骤可得 $\partial^\alpha u_\delta$ 的表达式对任意指标 α 均成立. □

定理 4.1.4

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 若 $u \in C_0^k(\Omega)$, 则 $\lim_{\delta\to 0}\|u_\delta - u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = 0$, 其中 $\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|\le k, x\in\overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|$.

证明. 把 $u(x)$ 定义延拓到全空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 在 Ω 外补充为 0, 对 $\forall\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 当 $|\alpha| \le k$ 时, 有

$$\begin{aligned}\partial^\alpha u_\delta(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\partial_x^\alpha j_\delta(x-y)\mathrm{d}y = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\partial_y^\alpha j_\delta(x-y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha u(y) j_\delta(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha u(x-\delta y) j(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而

$$\left|\partial^\alpha u_\delta(x) - \partial^\alpha(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha u(x-\delta y) - \partial^\alpha(x)\right| j(y)\mathrm{d}y.$$

注意到 $j(y) = 0(\forall\left|y\right| \ge 1)$, 而 $\partial^\alpha u(z)$ 在

$$(\mathrm{supp}\,u)_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathrm{supp}\,u) \le 1\right\}$$

上一致连续. 故对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta_0 < \frac{1}{2}$, 当 $0 < \delta < \delta_0$ 时,

$$\left|\partial^\alpha u(x-\delta y) - \partial^\alpha u(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \left|y\right| \le 1,$$

所以有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\alpha u_\delta(x) - \partial^\alpha u(x)\right| < \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} j(y)\mathrm{d}y = \varepsilon.$$

故 $\lim_{\delta\to 0}\|u_\delta - u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = 0$. □

定理 4.1.5

设 $1 \le p < \infty$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, $u \in L^p(\Omega)$. 若在 Ω 外补充定义 $u = 0$, 并记

$$u_\delta(x) := \int_{R^n} u(y) j_\delta(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) j_\delta(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $u_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\lim\limits_{\delta\to 0}\|u-u_\delta\|_{L^p(\Omega)}=0$.

证明.

方法一. 由于 Ω 有界, $u\in L^p(\Omega)\subset L^1(\Omega)$, 故在定理4.1.3中取 $\Omega=\mathbb{R}^n, K=\overline{\Omega}$ 可得 $u_\delta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

给定 $\varepsilon>0$, 存在 $v\in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|u-v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<\frac{\varepsilon}{3}$. 由 v 的连续性, 存在 $\delta_0>0$ 使得

$$\left|v(x)-v(x-y)\right|<\frac{\varepsilon}{3|\Omega|^{\frac{1}{p}}},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n, \left|y\right|\le\delta_0.$$

故对 $0<\delta<\delta_0$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u(x)-u_\delta(x)|^p\mathrm{d}x=\int_\Omega\left|\int_{\mathbb{R}^n}(u(x-y)-u(x))j_\delta(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\\
\le&\int_\Omega\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x-y)-u(x)\right|j_\delta(y)^{\frac{1}{p}}\cdot j_\delta(y)^{\frac{1}{p'}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
\le&\int_\Omega\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left|u(x-y)-u(x)\right|j_\delta(y)^{\frac{1}{p}}\right)^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(j_\delta(y)^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x-y)-u(x)\right|^p j_\delta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
\le&3^{p-1}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u(x)-v(x)|^p+\left|v(x)-v(x-y)\right|^p+\left|v(x-y)-u(x-y)\right|^p\right)j_\delta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
\le&3^{p-1}\left(2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)-v(x)|^p j_\delta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\left|v(x)-v(x-y)\right|^p j_\delta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\\
\le&3^{p-1}\left(2\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)-v(x)|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\varepsilon}{3|\Omega|^{\frac{1}{p}}}\right)^p j_\delta(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\\
<&3^{p-1}\left(2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p\right)=\varepsilon^p,
\end{aligned}$$

其中 p' 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$(当 $p=1$ 时第二三行可以略去), 第三行使用了 Holder 不等式, 第五行使用了不等式 $(a+b+c)^p\le 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p)$. 故 $\|u-u_\delta\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon(\forall 0<\delta<\delta_0)$, 从而 $\lim\limits_{\delta\to 0}\|u-u_\delta\|_{L^p(\Omega)}=0$.

接下来证明 u_δ 几乎处处收敛于 u.

方法二. 首先证明当 $\delta \to 0$ 时, u_δ 几乎处处收敛于 u. 注意到

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u_\delta(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} \big|u(x)-u(x-y)\big| j_\delta(y)\mathrm{d}y \\
&= \delta^{-n}\int_{B(x,\delta)} |u(x)-u(z)|\, j\Big(\frac{x-z}{\delta}\Big)\mathrm{d}z \\
&\le \|j\|_{C(B(0,1))}|B(0,1)|\cdot\frac{1}{|B(x,\delta)|}\int_{B(x,\delta)}|u(x)-u(z)|\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

由 Lebesgue 微分定理 (附录A.9) 知, 上式几乎处处趋于 0.

下面证明 $\|u_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. 若 $p=1$, 则显然成立. 若 $1<p<\infty$, 则由 Holder 不等式,

$$
\begin{aligned}
\|u_\delta\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|u(x-y)\big| j_\delta(y)^{\frac{1}{p}}\cdot j_\delta^{\frac{1}{p'}}(y)\mathrm{d}y\Big)^p \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big|u(x-y)\big|^p j_\delta(y)\mathrm{d}y\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} j_\delta(y)\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{p'}}\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} j_\delta(y)\int_{\mathbb{R}^n}\big|u(x-y)\big|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

其中 p' 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 因此 $\|u_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, 从而 $u_\delta \in L^p(\Omega)$. 再由 Lebesgue 控制收敛定理以及 $u_\delta \to u$ a.e. 知 $\|u-u_\delta\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. □

☞ **注**

由方法二的证明过程, 实际上在定理条件下还有 $u_\delta \to u$ a.e.

定理 4.1.6

设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 中的局部可积函数 (在任意紧集上积分有限), 则 $u_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(1) 若 $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 则在 u_δ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 $C_0(\mathbb{R}^n)$.

(2) 设 $1 \le p < \infty$. 若 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $\|u_\delta - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$.

证明. 结合前两个定理不难得出. □

4.1.2 基本空间和广义函数

定义 4.1.7: 空间 $\mathscr{D}(\Omega)$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 记 $\mathscr{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$, 在其中定义收敛如下: 设 $\{\varphi_j\}_0^\infty \subset \mathscr{D}(\Omega)$, 若

(1) 存在包含于 Ω 的紧集 K 使得 $\mathrm{supp}\varphi_j \subset K(\forall j \geq 1)$.

(2) 对任意的 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 当 $j \to \infty$ 时, 有

$$\max_{x\in K}\left|\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_0(x)\right| \to 0.$$

则称 $\{\varphi_j\}$ 收敛于 φ_0, 记作 $\varphi_j \to \varphi_0$.

注

对 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中的收敛不存在一个与之相容的范数, 甚至不存在与之相容的度量空间, 因此 $\mathscr{D}(\Omega)$ 不是赋范空间, 也不是度量空间.

引理 4.1.8: $\mathscr{D}(\Omega)$ 的序列完备性

若 $\{\varphi_j\}$ 满足

(1) 存在包含于 Ω 的紧集 K 使得 $\mathrm{supp}\varphi_j \subset K$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 存在 $N > 0$ 使得

$$\max_{x\in K}\left|\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi_l(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall k, l > N.$$

则存在 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ 使得 $\varphi_j \to \varphi$.

证明. 留作习题. □

定义 4.1.9: 广义函数

$\mathscr{D}(\Omega)$ 上的线性连续泛函称为**广义函数**或**分布**, 其全体称作 $\mathscr{D}'(\Omega)$. 也即 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 满足

(1) 线性性: $\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$.

(2) 连续性: 若 $\{\varphi_j\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ 满足 $\varphi_j \to \varphi$, 则有 $\langle f, \varphi_j\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.

例 4.1.10: 局部可积函数

对 $f\in L^1_{loc}(\Omega)$(Ω 上局部可积函数, 即 f 在任意包含于 Ω 的紧集上积分有限), 依

$$\langle f,\varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$$

定义的 f 是广义函数.

证明. 线性性显然, 下证连续性. 设 $\varphi_j\to 0$, 则存在紧集 $K\subset\Omega$ 使得 $\mathrm{supp}\varphi_j\subset K(\forall j)$ 并且 $\max\limits_K|\varphi_j|\to 0$. 故

$$|\langle f,\varphi_j\rangle|\le\left(\int_K|f|\mathrm{d}x\right)\max_K|\varphi_j|\to 0,$$

由于 f 是线性的, 此即 f 连续. □

注

上述的局部可积函数 f 与广义函数 f 是一一对应的, 因为 $f_1\equiv f_2$ 当且仅当 $\int_\Omega f_1\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega f_2\varphi\mathrm{d}x(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega))$.

例 4.1.11: Dirac 函数

对 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 定义 $\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$, 则显然有 $\delta\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

对 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 定义 $\langle\delta^{(\alpha)},\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0)(\varphi\in\mathscr{D}(\Omega))$, 则 $\delta^{(\alpha)}\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

定理 4.1.12: 广义函数等价条件

$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 的充要条件为: 对任意紧集 $K\subset\Omega$, 存在常数 $C>0$ 和非负整数 m 使得

$$|\langle f,\varphi\rangle|\le C\cdot\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le m}}|\partial^\alpha\varphi(x)|,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\mathrm{supp}\varphi\subset K.$$

证明. 必要性: 反设存在紧集 $K\subset\Omega$, $\{\varphi_j\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$ 并且 $\mathrm{supp}\varphi_m\subset K(\forall m\ge 1)$, 满足

$$\sup_{x\in K,|\alpha|\le m}|\partial^\alpha\varphi_m(x)|<\frac{1}{m}|\langle f,\varphi_m\rangle|,\quad\forall m\ge 1.$$

由 f 的线性性, 不妨设 $|\langle f,\varphi_m\rangle|=1(\forall m\ge 1)$. 则由以上不等式可得 $\varphi_m\to 0$, 而 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$, 故 $\langle f,\varphi_m\rangle\to 0$, 矛盾.

充分性: 设紧集 $K\subset\Omega$, $\{\varphi_j\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$ 并且 $\operatorname{supp}\varphi_j\subset K(\forall j)$. 取与 K 对应的常数 $C>0$ 和非负整数 m, 如果 $\varphi_j\to 0$, 则根据收敛的定义,

$$\sup_{x\in K,|\alpha|\le m}\left|\partial^\alpha\varphi_j(x)\right|\to 0,$$

再由定理中不等式易得 $\langle f,\varphi_j\rangle\to 0$. 从而 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$. □

定义 4.1.13: $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的 $*$ 弱收敛

设 $\{f_j\}\subset\mathscr{D}'(\Omega)$, 若 $\langle f_j,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 则称 f_j $*$ **弱收敛**于 f, 简称 f_j 收敛于 f, 记作 $f_j\to f$.

例 4.1.14

设 $x_0\in\Omega$, 对 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 定义 $\langle\delta_{x_0},\varphi\rangle:=\varphi(x_0)$. 则 $j_\varepsilon(\cdot-x_0)\to\delta_{x_0}$.

证明. 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}
&\left|\langle j_\varepsilon(\cdot-x_0),\varphi\rangle-\langle\delta_{x_0},\varphi\rangle\right|\\
=&\left|\int_\Omega j_\varepsilon(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x-\varphi(x_0)\right|\\
=&\left|\int_\Omega j_\varepsilon(x-x_0)\big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big)\mathrm{d}x\right|\\
\le&\int_\Omega j_\varepsilon(x-x_0)\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right|\mathrm{d}x\\
\le&\sup_{x\in K,|\alpha|=1}\left|\partial^\alpha\varphi(x)\right|\cdot\sup_{x,y\in\Omega}|x-y|\cdot\int_\Omega j_\varepsilon(x-x_0)\mathrm{d}x\\
=&\operatorname{diam}\Omega\cdot\sup_{x\in K,|\alpha|=1}\left|\partial^\alpha\varphi(x)\right|\to 0,
\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{diam}\Omega:=\sup_{x,y\in\Omega}|x-y|$. □

例 4.1.15

取 $\Omega=\mathbb{R}$, 记 $f_j(x)=\frac{\sin jx}{\pi x}(j\ge 1)$, 则 $f_j\to\delta$.

证明. 留作习题. □

定理 4.1.16: 广义函数的正则化

设 $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $T_\varepsilon(y):=\langle T, j_\varepsilon(y-\cdot)\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 函数, 并且 $T_\varepsilon\to T$.

证明. 由 T 的连续性, 当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{T_\varepsilon(y+he_1)-T_\varepsilon(y)}{h}=\left\langle T,\frac{j_\varepsilon(y-\cdot+he_1)-j_\varepsilon(y-\cdot)}{h}\right\rangle\to\langle T,\partial^{e_1}j_\varepsilon(y-\cdot)\rangle.$$

反复应用上式可得 $T_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 则由积分的连续性,

$$\begin{aligned}|\langle T-T_\varepsilon,\varphi\rangle|&=\left|\langle T,\varphi\rangle-\int_{\mathbb{R}^n}\langle T,j_\varepsilon(y-\cdot)\rangle\varphi(y)\mathrm{d}y\right|\\&=\left|\langle T,\varphi\rangle-\left\langle T,\int_{\mathbb{R}^n}j_\varepsilon(y-\cdot)\varphi(y)\mathrm{d}y\right\rangle\right|=|\langle T,\varphi\rangle-\langle T,\varphi_\varepsilon\rangle|\to 0,\end{aligned}$$

上式趋于 0 是因为由定理4.1.4知, $\varphi_\varepsilon\to\varphi$. □

定义 4.1.17: 广义函数的导数

设 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$, 定义

$$\langle\partial^\alpha T,\varphi\rangle:=(-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial^\alpha\varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

则 $\partial^\alpha T\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

☞ **注**

不难验证广义导数 ∂^α 与求导次序无关, 该证明留作习题.

例 4.1.18: Heaviside 函数

记 $H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则 $\langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_0^\infty\varphi'\mathrm{d}x=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}))$, 故 $H'=\delta$.

4.1.3 作业

✍ **题目4.1.1.** 若 $\{\varphi_j\}$ 满足

(1) 存在包含于 Ω 的紧集 K 使得 $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 存在 $N > 0$ 使得

$$\max_{x\in K}\left|\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi_l(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall k, l > N.$$

证明: 存在 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ 使得 $\varphi_j \to \varphi$.

解答. 由题目, 对任意给定的 $m \geq 0$, $\{\varphi_j\}$ 是空间 $C^m(K)$ 中的 Cauchy 列, 依其中的范数收敛于 φ, 该函数与 m 无关, 因为 $\varphi(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j(x)$ 极限唯一. 而 $C^m(K)$ 中的范数为

$$\|\psi\|_m := \max_{x\in K, |\alpha|\leq m} \left|\partial^\alpha \psi_j\right|,$$

由范数定义不难看出, 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $\varphi_j \to \varphi$.

✍ **题目4.1.2.** 取 $\Omega = \mathbb{R}$, 记 $f_j(x) = \frac{\sin jx}{\pi x} (j \geq 1)$, 证明 $f_j \to \delta$.

解答.

$$\langle f_j - \delta, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \sin jx \mathrm{d}x \to 0, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),$$

上式趋于 0 是因为 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin jx}{\pi x}\mathrm{d}x = 1$, φ 在 0 处可导, 以及 Riemann-Lebesgue 引理, 因此 $f_j \to \delta$.

✍ **题目4.1.3.** 证明广义导数与求导次序无关.

解答. 设 $T \in \mathscr{D}'(\Omega), \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 则有

$$\begin{aligned}
&\langle \partial^\alpha \partial^\beta T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\beta T, \partial^\alpha \varphi \rangle \\
=&(-1)^{|\alpha+\beta|} \langle T, \partial^\beta \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha+\beta|} \langle T, \partial^\alpha \partial^\beta \varphi \rangle \\
=&(-1)^{|\beta|} \langle \partial^\alpha T, \partial^\beta \varphi \rangle = \langle \partial^\beta \partial^\alpha T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

4.2 速降函数与 Fourier 变换

定义 4.2.1: Schwartz 空间 (速降函数)

若 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 并且 $\forall \alpha, \beta$,

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = 0,$$

其中 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. 则称 φ 是一个**速降函数**, 全体速降函数组成的空间称为**Schwartz 空间**, 记作 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中规定收敛如下: 设 $\{\varphi_j\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\forall \alpha, \beta$, 都有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (\varphi_j - \varphi_0) \right| \to 0,$$

则称 $\varphi_j \to \varphi_0$.

定义 4.2.2: 缓增分布

称 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函为**缓增分布**, 缓增分布全体记作 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

引理 4.2.3: Schwartz 空间等价条件

设 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则以下三点等价:

(1) $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;

(2) $\forall \alpha, \beta$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| < \infty$;

(3) *对任意指标* β *和非负整数* k, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| < \infty$.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 由极限的有界性可得.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 只需注意到 $(1+|x|^2)^k$ 也是关于 x 的多项式即可.

(3) $\Longrightarrow$ (1): $\forall \alpha, \beta$, 取 $k = |\alpha|+1$, 则存在常数 $C > 0$ 使得

$$(1+|x|^2)^{|\alpha|+1} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \le C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

则

$$\left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| \le |x|^{|\alpha|} \cdot \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \le (1+|x|^2)^{|\alpha|} \cdot \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \le \frac{C}{1+|x|^2},$$

当 $|x| \to \infty$ 时, 上式右端趋于 0, 故左端也趋于 0. □

定理 4.2.4

对 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 记

$$\|f\|_N = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le N, |\beta|\le N} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right|.$$

对 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 又记

$$\rho(f,g) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\|f-g\|_N}{1+\|f-g\|_N}.$$

则 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 关于 ρ 构成一个完备度量空间, 并且关于 ρ 的收敛于以上定义的 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛一致.

证明. ρ 显然是一个度量. 下面证明关于 ρ 收敛与 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中定义的收敛一致. 若 $\rho(f_j, f) \to 0$, 则对每个 N,

$$\frac{1}{2^N} \cdot \frac{\|f_j - f\|_N}{1+\|f_j - f\|_N} \le \rho(f_j, f) \to 0,$$

从而 $\|f_j - f\|_N \to 0$, 从而 $f_j \to f$. 反之, 若 $f_j \to f$, 则任取 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 使得

$$\sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由于 $f_j \to f$, 故对每个 $N = 1, 2, \cdots, N_0$, 存在 J 使得

$$\|f_j - f\|_N < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j > J.$$

从而对任意的 $j > J$, 有

$$\begin{aligned}\rho(f_j, f) &\le \sum_{N=1}^{N_0} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\|f_j - f\|_N}{1+\|f_j - f\|_N} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \\ &\le \sum_{N=1}^{N_0} \frac{1}{2^N}\|f_j - f\|_N + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{N=1}^{N_0} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\rho(f_j, f) \to 0$.

最后证明 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 关于度量 ρ 完备. 若 $\{f_j\}$ 是 Cauchy 列, 则

$$\|f_j - f_i\|_{C^N(\mathbb{R}^n)} \le \|f_j - f_i\|_N \le 2^N \rho(f_j, f_i),$$

从而 $\{f_j\}$ 也是 $C^N(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列, 依其中的范数收敛到 $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$. 而根据极限的唯一性不难验证此 f 与 N 无关, 故实际上 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 容易验证此时有 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 并且 $\rho(f_j, f) \to 0$. □

定义 4.2.5: Fourier 变换

设 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义 f 的**Fourier 变换**为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x.$$

上式也记作 $\mathscr{F}: f \mapsto \hat{f}$.

定理 4.2.6: Fourier 变换的性质

设 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), x_0 \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$, 则

(1) $\big(f(x - x_0)\big)\hat{}\,(\xi) = e^{-ix_0\cdot\xi} \hat{f}(\xi)$;

(2) $\big(e^{ix_0\cdot x} f(x)\big)\hat{}\,(\xi) = \hat{f}(\xi - x_0)$;

(3) $(f * g)\hat{}\,(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, 其中 $(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \mathrm{d}y$;

(4) $\big(f(\frac{x}{\lambda})\big)\hat{}\,(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$;

(5) $(\partial^\alpha f)\hat{}\,(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$;

(6) $\partial^\alpha \hat{f}$ 存在并且 $(x^\alpha f)\hat{}\,(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{f}(\xi)$.

证明. (1)

$$\begin{aligned}\big(f(x - x_0)\big)\hat{}\,(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x + x_0)\cdot\xi} \mathrm{d}x \\ &= e^{-ix_0\cdot\xi} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x = e^{-ix_0\cdot\xi} \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\big(e^{ix_0\cdot x}f(x)\big)^{\widehat{}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix_0\cdot x}f(x)\cdot e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot(\xi-x_0)}\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi-x_0).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(f*g)^{\widehat{}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(f*g)(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i(x+y)\cdot\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)e^{-iy\cdot\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\right) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\big(f(\frac{x}{\lambda})\big)^{\widehat{}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{\lambda})e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\lambda x\cdot\xi}\mathrm{d}x = \lambda^n\hat{f}(\lambda\xi).\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha f)^{\widehat{}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial^\alpha f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-i\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \frac{(i\xi)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = (i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(x^\alpha f)^{\widehat{}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_\xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\ &= \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\partial_\xi^\alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = i^{|\alpha|}\partial^\alpha\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

□

引理 4.2.7

Fourier 变换是将 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 映到 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射.

证明. 首先证明任意速降函数 g 的 Fourier 变换 $\hat{g}$ 是有界的. 为此, 只需注意到

$$\left|\hat{g}(\xi)\right| \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x)\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{C}{(1+|x|^2)^n}\mathrm{d}x < \infty.$$

设 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 下面证明 $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 由 Fourier 变换的性质 (6), $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 结合性质 (5)(6) 可知,

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = \xi^\alpha i^{-|\beta|}(x^\beta f)\hat{}(\xi) = i^{-(|\alpha|+|\beta|)}(i\xi)^\alpha (x^\beta f)\hat{}(\xi) = i^{-(|\alpha|+|\beta|)}(\partial^\alpha x^\beta f)\hat{}\xi,$$

注意到上式右端是常数乘一个速降函数的 Fourier 变换, 必是有界的. 从而 $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

最后证明 Fourier 变换是连续的, 也即如果 $f_j \to f$, 则 $\hat{f}_j \to \hat{f}$. 设 $f_j \to f$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|f_j(x) - f(x)\right|\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}\mathrm{d}x \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^n\left|f_j(x) - f(x)\right| \to 0.$$

从而 $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)\right| \le \int_{\mathbb{R}^n}\left|f_j - f\right|\mathrm{d}x \to 0$. 注意到还有

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = i^{-(|\alpha|+|\beta|)}(\partial^\alpha x^\beta f)\hat{}(\xi),$$

以及 $\partial^\alpha x^\beta f_j \to \partial^\alpha x^\beta f$, 因此同理可得

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\xi^\alpha D^\beta(f_j(\xi) - f(\xi))\right| \to 0,$$

从而 $\hat{f}_j \to \hat{f}$. $\square$

引理 4.2.8

若记 $\psi(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, 则 $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\psi}=\psi$, 并且

$$\psi(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

证明. 显然有 $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 记 $\phi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, 则不难验证 ϕ 和 ϕ' 均满足微分方程

$$y'+xy=0.$$

因此 $\frac{\hat{\phi}}{\phi}$ 为常数. 由于 $\phi(0)=1$ 并且

$$\hat{\phi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1,$$

故 $\hat{\phi}=\phi$. 注意到

$$\psi(x)=\phi(x_1)\cdots\phi(x_n),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

故作 Fourier 变换可得

$$\hat{\psi}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x=\hat{\phi}(\xi_1)\cdots\hat{\phi}(\xi_n),\quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

故 $\hat{\psi}=\psi$. 最后, 由 $\hat{\psi}=\psi$ 以及

$$\hat{\psi}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x$$

容易得到引理中的等式. □

定理 4.2.9: 反演公式

设 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

证明. 对任意的 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x)e^{-ix\cdot y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\hat{g}(y)\mathrm{d}y.$$

在上式中取 $f(x)=\psi(\frac{x}{\lambda}),\lambda>0$, 则由 Fourier 变换的性质 (4) 可得

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\hat{g}(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\lambda^n\hat{\psi}(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}g\left(\frac{x}{\lambda}\right)\hat{\phi}(x)\mathrm{d}x.$$

当 $\lambda\to\infty$ 时, $g(\frac{x}{\lambda})\to g(0)$, $\psi(\frac{y}{\lambda})\to\psi(0)$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理, 在上式用令 $\lambda\to\infty$ 可得

$$g(0)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x=\psi(0)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(y)\mathrm{d}y.$$

由上一引理, 上式即 $g(0)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(y)\mathrm{d}y$. 最后令 $g(\cdot)=f(\cdot+x)$, 则由 Fourier 变换的性质 (1),

$$f(x)=g(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)e^{ix\cdot y}\mathrm{d}y,$$

上式即为所求. □

定理 4.2.10

若记 $\mathscr{F}:\varphi\mapsto\hat{\varphi}$ 是 Fourier 变换, 则它是将 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 映到其本身的线性连续双射, 并且 $\mathscr{F}^{-1}$ 也是连续的.

证明. 根据引理4.2.7, $\mathscr{F}$ 是将 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 映射到本身的线性连续映射. 由反演公式容易验证, $\mathscr{F}^2f(x)=f(-x)(f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$, 从而 $\mathscr{F}^4=I$. 因此 $\mathscr{F}$ 是双射, 并且逆映射 $\mathscr{F}^{-1}=\mathscr{F}^3$ 也是连续的. □

定理 4.2.11: Parseval 等式

对 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)\overline{\hat{g}}(y)\mathrm{d}y.$$

证明. 由反演公式,

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}y=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{g}(x)\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)e^{ix\cdot y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)\int_{\mathbb{R}^n}\overline{g}(x)e^{ix\cdot y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)\overline{\hat{g}}(y)\mathrm{d}y,$$

得证. □

定义 4.2.12: $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

对 $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 定义它的**Fourier 变换** $\mathscr{F}[T]\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\langle\mathscr{F}[T],\varphi\rangle=\langle T,\mathscr{F}\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

☞ **注**

由于 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 到其本身的同构, 故如上定义的 $\mathscr{F}[T]$ 的确是缓增分布, 并且不难证明如上定义的 Fourier 变换在 T 是一个速降函数时, 与速降函数的 Fourier 变换的定义一致.

定义 4.2.13: 分布的乘积和平移

设 $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f\in C^\infty(R^n)$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$\langle\tau_{x_0}T,\varphi\rangle:=\langle T,\varphi(x+x_0)\rangle,\quad\langle fT,\varphi\rangle:=\langle T,f\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

☞ **注**

当 $f\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 时, $\langle\tau_{x_0}f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x+x_0)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle f(x-x_0),\varphi\rangle(\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 因此该平移的定义与一般函数的平移一致.

定理 4.2.14: $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换的性质

设 $T\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),x_0\in\mathbb{R}^n,\lambda>0,\alpha$ 是任意指标, 则

(1) $\mathscr{F}[\tau_{x_0}T]=e^{-ix_0\cdot x}\mathscr{F}[T]$;

(2) $\mathscr{F}[e^{ix_0\cdot x}T]=\tau_{x_0}\mathscr{F}[T]$;

(3) $\mathscr{F}[\partial^\alpha T]=(ix)^\alpha\mathscr{F}[T]$;

(4) $\mathscr{F}[x^\alpha T]=i^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathscr{F}[T]$.

证明. 对 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

(1) $\langle\mathscr{F}[\tau_{x_0}T],\varphi\rangle=\langle T,\hat{\varphi}(x+x_0)\rangle=\langle T,\big(e^{-ix_0\cdot x}\varphi\big)^\wedge\rangle=\langle e^{-ix_0\cdot x}\mathscr{F}[T],\varphi\rangle$;

(2) $\langle\mathscr{F}[e^{ix_0\cdot x}T],\varphi\rangle=\langle T,e^{ix_0\cdot x}\hat{\varphi}\rangle=\langle T,\big(\varphi(x+x_0)\big)^\wedge\rangle=\langle\tau_{x_0}\mathscr{F}[T],\varphi\rangle$;

(3) $\langle \mathscr{F}[\partial^\alpha T], \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \hat{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \widehat{\left(i^{-|\alpha|}x^\alpha \varphi\right)}\rangle = \langle (ix)^\alpha \mathscr{F}[T], \varphi\rangle$;

(4) $\langle \mathscr{F}[x^\alpha T], \varphi\rangle = \langle x^\alpha \hat{\varphi}\rangle = \langle T, i^{-|\alpha|}\widehat{\left(\partial^\alpha \varphi\right)}\rangle = \langle i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathscr{F}[T], \varphi\rangle$. □

定理 4.2.15

$\mathscr{F}$ 是将 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 映到其本身的线性连续双射, 并且 $\mathscr{F}^{-1}$ 也是连续的.

证明. 首先证明 $\mathscr{F}$ 是连续的, 若 $\{T_m\} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T_m \to T_0$, 则对 $\forall \varphi \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathscr{F}[T_m], \varphi\rangle = \langle T_m, \hat{\varphi}\rangle \to \langle T_0, \hat{\varphi}\rangle = \langle \mathscr{F}[T_0], \varphi\rangle,$$

故 $\mathscr{F}[T_m] \to \mathscr{F}[T_0]$, $\mathscr{F}$ 连续.

接下来证明 $\mathscr{F}$ 是双射. 对 $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\langle \mathscr{F}^4[T], \varphi\rangle = \langle T, \mathscr{F}^4 \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle,$$

故 $\mathscr{F}^4 = I$, $\mathscr{F}$ 是双射, 并且 $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^3$ 也连续. □

例 4.2.16

$\mathscr{F}[\delta] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$, $\mathscr{F}[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta$.

证明. 对 $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\langle \mathscr{F}[\delta], \varphi\rangle = \langle \delta, \mathscr{F}\varphi\rangle = \mathscr{F}\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}x = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, \varphi\right\rangle,$$
$$\langle \mathscr{F}[1], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\varphi(0) = \langle (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta, \varphi\rangle,$$

故 $\mathscr{F}[\delta] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$, $\mathscr{F}[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta$. □

4.3 Sobolev 空间

在本节中, 如非特别说明, Ω 均指 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

定义 4.3.1: 非负整数阶 Sobolev 空间

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, m 是非负整数, $1 \le p \le \infty$. 定义

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \le m \right\}.$$

当 $1 \le p < \infty$ 时, 定义范数为

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

当 $p = \infty$ 时, 定义范数为

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \le m} \left\| \partial^\alpha u \right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

特别地, 当 $p = 2$ 时, 记 $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, 此时可以引入内积

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v) \mathrm{d}x.$$

☞ **注**

$W^{m,p}(\Omega)$ **的定义中,** $\partial^\alpha u$ **是指** u **的广义导数, 事实上根据广义导数的定义,** $u \in W^{m,p}(\Omega)$ **当且仅当** $u \in L^p(\Omega)$, **并且对每个** $|\alpha| \le m$, **存在** $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ **使得**

$$\int_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha(x) \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

引理 4.3.2

设赋范空间 X, Y 均是自反的, 则依范数 $\left\|(x, y)\right\| = \|x\| + \left\|y\right\| (x \in X, y \in Y)$ 定义的乘积空间 $X \times Y$ 也是自反的.

证明. 定义 $J : X^* \times Y^* \to (X \times Y)^*$ 为

$$\langle J(x^*, y^*), (x, y) \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle, \quad x \in X, y \in Y, x^* \in X^*, y^* \in Y^*.$$

若 $J(x^*,y^*)=0$, 则 $\langle x^*,x\rangle=-\langle y^*,y\rangle(\forall x\in X, y\in Y)$. 则 x^* 和 y^* 都是常值泛函, 而它们都是线性的, 故 $x^*=0, y^*=0$, J 是单射. 对任意 $z^*\in(X\times Y)^*$, 定义

$$\langle x^*,x\rangle=\langle z^*,(x,0)\rangle(\forall x\in X),\quad \langle y^*,y\rangle=\langle z^*,(0,y)\rangle(\forall y\in Y),$$

不难验证 $J(x^*,y^*)=z^*$, 故 J 是满射. 因此 J 是线性同构.

对 $z^{**}\in(X\times Y)^{**}$, 定义 $x^{**}\in X^{**}$ 和 $y^{**}\in Y^{**}$ 如下:

$$\langle x^{**},x^*\rangle:=\langle z^{**},J(x^*,0)\rangle(\forall x^*\in X^*),\quad \langle y^{**},y^*\rangle:=\langle z^{**},J(0,y^*)\rangle(\forall y^*\in Y^*).$$

由于 X 和 Y 均自反, 存在 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 使得

$$\langle x^{**},x^*\rangle=\langle x^*,x\rangle(\forall x^*\in X^*),\quad \langle y^{**},y^*\rangle=\langle y^*,y\rangle(\forall y^*\in Y^*).$$

从而容易验证

$$\langle J(x^*,y^*),(x,y)\rangle=\langle z^{**},J(x^*,y^*)\rangle,\quad \forall x^*\in X^*, y^*\in Y^*.$$

由于 J 是线性同构, 上式即 $\langle z^*,(x,y)\rangle=\langle z^{**},z^*\rangle(\forall z^*\in(X\times Y)^*)$, 因此 $X\times Y$ 是自反的. □

定理 4.3.3

(1) 对 $1\le p\le\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间.

(2) 对 $1\le p<\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ 是可分的.

(3) 对 $1<p<\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反空间.

证明. (1) 设 $\{u_m\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, 则对 $|\alpha|\le m$, $\{\partial^\alpha u_m\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, 从而由 $L^p(\Omega)$ 的完备性依 L^p 范数收敛于 $u^\alpha\in L^p(\Omega)$(当 $\alpha=0$ 时记作 u). 此外, 注意到对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$,

$$(-1)^{|\alpha|}\langle u,\partial^\alpha\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\partial^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega u_m(x)\partial^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \partial^\alpha u_m(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega u^\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle u^\alpha,\varphi\rangle,$$

因此根据广义导数的定义, $\partial^\alpha u = u^\alpha$, 从而 $\{u_m\}$ 依 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的范数收敛到 u.

(2) 由于当 $1\le p<\infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 可分, 而 $W^{m,p}(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega)$ 的子空间, 故也可分.

(3) 由上一引理以及 $L^p(\Omega)$ 是自反空间, $X = \underbrace{L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)\times\cdots\times L^p(\Omega)}_{k\text{ 个}}$ 也是自反空间, 其中 k 是满足 $|\alpha|\le m$ 的指标 α 的个数. 则若将 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 视作 $(u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n},\cdots)\in X$, 则 $W^{m,p}(\Omega)$ 可以视作 X 的子空间, 而 $W^{m,p}(\Omega)$ 本身是 Banach 空间, 故 $W^{m,p}(\Omega)$ 是 X 的闭子空间, 由于自反空间的闭子空间仍然是自反空间, 故 $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的. □

定理 4.3.4

(1) $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

(2) $m_1\ge m_2\ge 0$, $W^{m_1,p}(\Omega)\subset W^{m_2,p}(\Omega)$.

(3) 若 Ω 有界并且 $p_1\ge p_2\ge 1$, 则 $W^{m,p_1}(\Omega)\subset W^{m,p_2}(\Omega)$.

(4) 设 $u\in W^{m,p}(\Omega)$, $|\beta|\le m$, 则 $\partial^\beta u\in W^{m-|\beta|,p}(\Omega)$.

证明. (1)(2)(4) 根据定义容易验证, (3) 是因为 $L^{p_1}(\Omega)\subset L^{p_2}(\Omega)$(定理A.3.6的 (3)). □

定义 4.3.5

对非负整数 m 和 $1\le p\le\infty$, 记 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包.

☞ **注**

(1) 事实上 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是某种意义下在 $\partial\Omega$ 上为 0 的 Sobolev 函数, 这里的某种意义是因为通常来说 $\partial\Omega$ 是一个零测集, 对一般的可测函数无法讨论其在 $\partial\Omega$ 上的取值. 这个某种意义可以理解为一个线性算子 (称为秩算子), 因为当 Ω 足够光滑时 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 而 $C^\infty(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 的取值是有意义的.

(2) $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是某种意义下在 $\partial\Omega$ 上低于 m 阶的导数均为 0 的 Sobolev 函数.

(3) 根据 $C_0^\infty(\Omega)$ 以及 Sobolev 空间范数的特性, $W_0^{1,p}(\Omega)$ 很自然的包含一些熟知的元素, 比如在边界上为 0 的 $C^1(\Omega)$ 函数.

定理 4.3.6: Sobolev 空间的紧嵌入

设 $1 \le p \le \infty$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 则 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 到 $L^p(\Omega)$ 的单位映射是紧算子, 即 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的有界列有在 $L^p(\Omega)$ 中收敛的子列.

☞ **注**

对于足够边界足够光滑的有界区域 Ω(比如 Ω 由光滑函数围成), 该定理对 $W^{1,p}(\Omega)$ 也成立.

该定理的证明以及下一个定理中会使用记号:

$$Du := (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}), \quad |Du| := \left(\sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|Du\|_{L^p(\Omega)} := \||Du|\|_{L^p(\Omega)}.$$

证明. 首先证明如果 $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则在 Ω 外补充定义为 0 后, $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. 事实上只需证明将广义导数 $v_{x_i} (1 \le i \le n)$ 在 Ω 外补充定义为 0 后, v_{x_i} 是 v 在 $\mathbb{R}^n$ 中的广义导数. 取 $\{v^m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $v^m \to v$, 注意到在 Ω 外补充定义为 0 后 $v^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $1 \le i \le n$, 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v_{x_i}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} v_{x_i}^m(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
= -\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} v^m(x)\varphi_{x_i}(x)\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi_{x_i}(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

因此 $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

设 $\{u_m\}$ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界列, 若补充在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 上补充定义函数为 0, 则 $\{u_m\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. 则

$$\begin{aligned}
\left|u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(y)(u_m(x-y) - u_m(x))\mathrm{d}x\right| \\
= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(y) \int_0^1 Du_m(x-ty)\cdot(-y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\right| &\le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(y) \int_0^1 |Du_m(x-ty)|\mathrm{d}t\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

从而当 $1 \le p < \infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|^p \mathrm{d}x \le \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(y) \int_0^1 |Du_m(x-ty)| \mathrm{d}t \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x$$
$$\le \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(y) \int_0^1 |Du_m(x-ty)|^p \mathrm{d}t \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du_m(x)|^p \mathrm{d}x,$$

也即 $\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon \|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 注意到 u_m 在 Ω 外恒为 0, 因此有 $\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon \|Du_m\|_{L^p(\Omega)}$, 这个不等式在 $p=\infty$ 时显然也成立. 因此在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_m^\varepsilon \to u_m$, 该收敛在 $\varepsilon \to 0$ 时对 m 是一致的. 故对充分小的 ε, 有 $\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{2}$.

对该 $\varepsilon > 0$, 容易验证 $\{u_m^\varepsilon\}$ 作为 $C(\overline{\Omega})$ 的子集是一致有界且等度连续的, 由 Arzela-Ascoli 定理, 存在子列 $\{u_{m,1}^\varepsilon\}$ 在 Ω 上一致收敛, 故

$$\limsup_{m,l\to\infty} \|u_{m,1} - u_{l,1}\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\le \limsup_{m,l\to\infty} \|u_{m,1} - u_{m,1}^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{m,1}^\varepsilon - u_{l,1}^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{l,1}^\varepsilon - u_{l,1}\|_{L^p(\Omega)} \le 1.$$

若已经有 $\limsup\limits_{m,l\to\infty} \|u_{m,k} - u_{l,k}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{k}$, 则取充分小的 ε 使得 $\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{2(k+1)}$. 由 Arzela-Ascoli 定理, 存在 $\{u_{m,k}^\varepsilon\}$ 的子列 $\{u_{m,k+1}^\varepsilon\}$ 在 Ω 上一致收敛. 重复上述运算可得

$$\limsup_{k,l\to\infty} \|u_{m,k+1} - u_{l,k+1}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{k+1}.$$

取对角列 $\{u_{m,m}\}$, 则它显然是 Cauchy 列, 由 $L^p(\Omega)$ 的完备性, 收敛于 $u \in L^p(\Omega)$. □

引理 4.3.7: Poincare 不等式

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 则存在只与 Ω 有关的常数 $C>0$ 使得

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x \le C \int_\Omega |Du(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

☞ **注**

该引理说明, $H_0^1(\Omega)$ 中有等价范数 $\|u\|_* = \left(\int_\Omega |Du(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(u \in H_0^1(\Omega)\right)$.

证明. 由于 Ω 是有界的, 存在 $R>0$ 使得 $\Omega \subset (-R,R)^n$. 则在 Ω 之外补充定义为 0

后, $H_0^1(\Omega) \subset H_0^1((-R,R)^n)$, 再根据 C_0^∞ 在 H_0^1 中稠密, 只需对 $\Omega = (-a,a)$ 以及 $u \in C_0^\infty((-a,a)^n)$ 证明该不等式即可. 注意到

$$
\begin{aligned}
|u(x)|^2 &= \left|\int_{-a}^{x_1} u_{x_1}(t_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t\right|^2 \le \left(\int_{-a}^{a} |Du(t_1,x_2,\cdots,x_n)|\mathrm{d}t_1\right)^2 \\
&\le \left(\int_{-a}^{a} 1^2\mathrm{d}t_1\right)\left(\int_{-a}^{a} |Du(t_1,x_2,\cdots,x_n)|^2\mathrm{d}t_1\right) = 2a\int_{-a}^{a} |Du(t_1,x_2,\cdots,x_n)|^2\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}
$$

在 $(-a,a)^n$ 上积分得

$$
\int_{(-a,a)^n} |u(x)|^2\mathrm{d}x \le 2a\int_{(-a,a)^n}\int_{-a}^{a} |Du(t_1,x_2,\cdots,x_n)|^2\mathrm{d}t_1\mathrm{d}x = (2a)^2\int_{(-a,a)^n} |Du(x)|^2\mathrm{d}x,
$$

得证. □

引理 4.3.8

设 $(X_1,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X_2,\|\cdot\|_2)$ 均为赋范空间, $X_2 \subset X_1$, 并且存在 $C>0$ 使得

$$
\|x\|_1 \le C\|x\|_2, \quad \forall x \in X_2.
$$

若存在 $\{x_n\} \subset X_2$, $\{x_n\}$ 在 X_2 中弱收敛于 $x \in X_2$, 则 $\{x_n\}$ 在 X_1 中也弱收敛于 x.

☞ **注**

此即如果一个空间中的范数 2 比范数 1 强, 则范数 2 的弱收敛可以推出范数 1 的弱收敛.

证明. 对 $f \in X_1^*$, 有

$$
|f(x)| \le \|f\|_1 \cdot \|x\|_1 \le C\|f\|_1 \cdot \|x\|_2, \quad \forall x \in X_2
$$

故也有 $f \in X_2^*$. 而 $\{x_n\}$ 在 X_2 中弱收敛于 x, 则 $f(x_n) \to f(x)$, 因此在 X_1 中也弱收敛于 x. □

定理 4.3.9

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, $f \in L^2(\Omega)$, 则 *Dirichlet* 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

存在唯一的弱解, 也即存在唯一的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega Du(x) \cdot Dv(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

☞ **注**

如果 $u \in C^2(\Omega)$ 是该 Dirichlet 问题的古典解, 则由边界条件, 显然有 $u \in H_0^1(\Omega)$. 设 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $-v\Delta u = fv$ 在 Ω 上积分再分布积分可得, $\int_\Omega Du \cdot Dv = \int_\Omega fv$, 再由 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的稠密性可知, 此时 u 也是弱解, 因此弱解是古典解的自然推广.

证明. **方法一**. 该方法主要基于 Lax-Milgram 定理 (定理2.3.14). 令 $X := H_0^1(\Omega)$, 其上内积定义为 $H^1(\Omega)$ 中的内积, $a(u,v) = \int_\Omega Du \cdot Dv \mathrm{d}x (u, v \in X)$, 下面验证 X 和 $a(\cdot,\cdot)$ 满足定理条件. 由于 X 是 $H^1(\Omega)$ 的闭子集, 而 $H_0^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 故 X 也是 Hilbert 空间. $a(\cdot,\cdot)$ 显然是共轭双线性函数, 并且有

$$|a(u,v)| \le \left(\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |Dv|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \le \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

根据 Poincare 不等式, 还有

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x \le (C+1) \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x = (C+1) a(u,u), \quad \forall u \in X.$$

因此 $a(\cdot,\cdot)$ 满足 Lax-Milgram 定理的条件, 从而存在唯一具有有界逆的有界线性算子 A 使得

$$a(u,v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in X.$$

若定义

$$\langle f,v\rangle:=\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x,\quad v\in H,$$

则 $f\in X^*$. 根据 Riesz 表示定理 (定理2.2.1), 存在 $\tilde{u}\in X$ 使得

$$\langle f,v\rangle=(v,\tilde{u}),\quad \forall v\in X.$$

记 $u:=(A^*)^{-1}\tilde{u}$(由于 A^* 可逆当且仅当 A 可逆, 并且 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$, 这样的 u 存在), 则

$$a(u,v)=(u,Av)=(A^*u,v)=(\tilde{u},v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall X,$$

上式即 u 是弱解.

下证唯一性, 如果 u_1 和 u_2 都是弱解, 则

$$0=\langle f,A^{-1}v\rangle-\langle f,A^{-1}v\rangle=a(u_1-u_2,A^{-1}v)=(u_1-u_2,AA^{-1}v)=(u_1-u_2,v),\quad \forall v\in X,$$

因此 $u_1=u_2$.

方法二. 定义 $H_0^1(\Omega)$ 中的内积为

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)}:=\int_\Omega Du(x)\cdot Dv(x)\mathrm{d}x,\quad u,v\in H_0^1(\Omega),$$

其中的范数仍记为 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$. 由 Poincare 不等式, 该范数与通常的范数等价, 因此此时 $H_0^1(\Omega)$ 还是 Hilbert 空间.

对 $w\in H_0^1(\Omega)$, 记

$$J(w)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|Dw(x)|^2-f(x)w(x)\right)\mathrm{d}x.$$

首先证明存在 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $J(u)=\inf\limits_{w\in H_0^1(\Omega)}J(w)$. 为此, 记 $I=\inf\limits_{w\in H_0^1(\Omega)}J(w)$, 则存在 $u_m\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $J(u_m)\to I$. 故存在 $M>0$ 使得 $J(u_m)\le M(\forall m\ge 1)$. 从而

$$\frac{1}{2}\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}-\|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}\le\frac{1}{2}\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}-\|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u_m\|_{L^2(\Omega)}\le J(u_m)\le M,$$

从而 $\{u_m\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 由于 $H_0^1(\Omega)$ 是自反空间 (Hilbert 空间均自反) 和 Eberlein-Smulian 定理 (定理:2.5.31), $\{u_m\}$ 存在弱收敛于 $u \in H_0^1(\Omega)$ 的子列 $\{u_{m_j}\}$. 而 $\{u_{m_j}\}$ 同样是 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界列, 故由 Sobolev 紧嵌入定理, 存在 $w \in L^2(\Omega)$ 以及子列 $\{u_{m_{j_i}}\}$ L^2 收敛于 w.

记 $w_i := u_{m_{j_i}}$. 由 Poincare 不等式, $H_0^1(\Omega)$ 中的范数比 $L^2(\Omega)$ 中的范数更强, 故根据上一引理, w_i 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛于 u.

因此由强收敛必弱收敛以及弱极限的唯一性, $w = u$, 从而 w_i 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛于 u, 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 u. 由弱收敛可知,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{i\to\infty} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

而根据上式以及 $\|w_i - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ 可得

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Du|^2 - fu\right)\mathrm{d}x \leq \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Dw_i|^2 - fw_i\right)\mathrm{d}x = \liminf_{i\to\infty} J(w_i) = I,$$

而由 I 的定义, $J(u) \geq I$, 故 $J(u) = I$.

接下来证明使得 $J(u) = \inf\limits_{w\in H_0^1(\Omega)} J(w)$ 的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是唯一的. 若 $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ 均取到 J 的最小值. 对 $\tilde{u} := \frac{u_1+u_2}{2}$, 有

$$|D\tilde{u}|^2 = \frac{1}{4}\left(|Du|^2 + 2Du\cdot Dv + |Dv|^2\right) \leq \frac{|Du_1|^2 + |Du_2|^2}{2},$$

从而 $I \leq J(\tilde{u}) \leq \frac{J(u_1)+J(u_2)}{2} \leq I$, 故以该不等式能取到等号, 从而 $Du_1 = Du_2$, 故 $\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, 因此 $u_1 = u_2$.

最后证明 $J(u) = \inf\limits_{w\in H_0^1(\Omega)} J(w)$ 当且仅当 u 是定理中 Dirichlet 问题的弱解.

一方面, 如果 $J(u) = \inf\limits_{w\in H_0^1(\Omega)} J(w)$, 则 $J(u) \leq J(w), \forall w \in H_0^1(\Omega)$. 任取 $v \in H_0^1(\Omega)$, 记

$$i(\tau) := J(u+\tau v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Du|^2 + \tau Du\cdot Dv + \frac{1}{2}\tau^2|Dv|^2 - fu - \tau fv\right)\mathrm{d}x, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

则

$$i'(\tau)=\int_\Omega\big(Du\cdot Dv+\tau|Dv|^2-fv\big)\mathrm{d}x,\quad \tau\in\mathbb{R}.$$

注意到 0 是 $i(\cdot)$ 的最小值点, 故 $i'(0)=0$, 也即

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

上式对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$ 均成立, 因此 u 是弱解.

另一方面, 如果 u 是弱解. 则对任意的 $w\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}J(u)-J(w)&=\int_\Omega\left(\frac12|Du|^2-\frac12|Dw|^2-fu+fw\right)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\left(\frac12|Du|^2-\frac12|Dw|^2-|Du|^2+Du\cdot Dw\right)\mathrm{d}x=-\frac12\int_\Omega|Dw-Du|^2\mathrm{d}x\le 0,\end{aligned}$$

因此 $J(u)=\inf\limits_{w\in H_0^1(\Omega)}J(w)$.

以上分别证明了 u 取到 J 的最小值当且仅当 u 是弱解, 以及 J 的最小值点存在唯一, 因此弱解同样存在唯一. □

☞ **注**

以上两种也适用于更加复杂的情况, 比如方法一中可以将 $L=-\Delta$ 推广到

$$Lu:=-\sum_{i,j=1}^n\left(a^{ij}u_{x_i}\right)_{x_j},$$

其中 $a^{ij}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ 并且存在常数 $\theta>0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\theta|\xi|^2,\quad \forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

此时弱解的定义为 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i}(x)v_{x_j}(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

推广后的证明过程并无本质区别. 方法二的推广较为复杂, 甚至能处理一些非线性的偏微分方程, 在此不作讨论.

附录 A 补充内容

A.1 度量空间中的拓扑

本节中若无特别说明, (X,ρ) 均表示度量空间.

定义 A.1.1: 开球与闭球

设 $x_0\in X, r>0$, 称

$$B(x_0,r)=\{x\in X:\rho(x,x_0)<r\}$$

为以 x_0 为球心, r 为半径的**开球**, 称

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X:\rho(x,x_0)\le r\}$$

为相应的**闭球**.

定义 A.1.2: 内点, 内部与开集

设 $A\subset X$. 对 $x_0\in X$, 若存在 $\delta>0$ 使得 $B(x_0,\delta)\subset A$, 则 x_0 称为 A 的**内点**. A 的所有内点组成的集合称为 A 的**内部**, 记作 A°. 若 $A^\circ=A$, 则称 A 为**开集**.

性质 A.1.3: 开集的性质

(1) 空集 $\varnothing$ 和全集 X 均为开集.

(2) 有限多个开集的交仍为开集.

(3) 任意个开集的并仍为开集.

定义 A.1.4: 聚点, 导集, 闭包和闭集

设 $A\subset X$. 对于 $x_0\in X$, 若 $\forall\varepsilon>0$, 有

$$(B(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\})\cap A\neq\varnothing,$$

则称 x_0 是 A 的**聚点**. 称 A 的所有聚点组成的集合为 A 的**导集**, 记为 A'.

称 $A\cup A'=\overline{A}$ 为 A 的**闭包**.

若 $A=\overline{A}$, 则称 A 为**闭集**.

☞ **注**

A 的闭包是包含 A 的最小闭集, 也即包含 A 的所有闭集之交.

性质 A.1.5: 闭集的性质

(1) 空集 $\varnothing$ 和全集 X 均为闭集.

(2) 有限多个闭集的并仍为闭集.

(3) 任意个闭集的交仍为闭集.

(4) A 是闭集当且仅当 $\forall\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\to x_0$ 都有 $x_0\in A$.

(5) A 是闭集当且仅当 A^c 是开集.

A.2 Weierstrass 逼近定理

定理 A.2.1: Weierstrass 逼近定理

设 $-\infty<a<b<\infty$, 则 $\forall f\in C[a,b]$, 存在 $[a,b]$ 上的多项式列 $\{P_n\}$ 使得 P_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

证明. 不妨设 $[a,b]=[0,1]$ 并且 $f(0)=f(1)=0$, 否则作线性变换以及

$$g(x)=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))$$

即可.

在此假设下, 补充定义 $f\equiv 0, x\notin[0,1]$, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 令

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n,\quad n\geq 1,$$

其中 c_n 满足

$$\int_{-1}^{1}Q_n(x)\mathrm{d}x=1,\quad \forall x\geq 1.$$

则由

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geq 2\int_{0}^{n^{-\frac{1}{2}}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$$
$$\geq 2\int_{0}^{n^{-\frac{1}{2}}}(1-nx^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$$

可知 $c_n<\sqrt{n}$. $\forall\delta>0$, 由 $c_n<\sqrt{n}$ 可得

$$Q_n(x)\leq\sqrt{n}(1-\delta^2)^n,\quad \delta\leq|x|\leq 1.$$

令

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}f(t)Q_n(t-x)\mathrm{d}t,$$

则 P_n 是关于 x 的多项式. 给定 $\varepsilon>0$, 由 f 一致连续, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\left|x-y\right|<\delta.$$

记 $M=\sup\left|f\right|$, 则

$$\left|P_n(x)-f(x)\right|=\left|\int_{-1}^{1}(f(x+t)-f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq\int_{-1}^{1}\left|f(x+t)-f(x)\right|Q_n(t)\mathrm{d}t\leq 2M\int_{|x|>\delta}Q_n(t)\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}\int_{|x|\leq\delta}Q_n(t)\mathrm{d}t$$
$$\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2},$$

当 n 充分大时, 上式 $<\varepsilon$, 故 P_n 一致收敛于 f. □

A.3 L^p 空间: 实变内容

定义 A.3.1: L^p 空间

设 $1 \le p \le \infty$, (E,μ) 是测度空间, f 是 E 上的可测函数, 定义

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \inf\limits_{\mu(E_0)=0} \sup\limits_{x\in E\setminus E_0} \left|f(x)\right|, & p = \infty. \end{cases}$$

记 $\mathrm{L}^p(\mu)$ 为所有满足 $\|f\|_p < \infty$ 的可测函数 f. 特别地, 若 μ 是 Lebesgue 测度且 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测子集, 则记为 $\mathrm{L}^p(E)$. $\|f\|_\infty$ 还记作 $\operatorname{ess\,sup}_E |f|$, 称为 f 的**本性上界** (Essential Supreme).

☞ **注**

在 L^p 空间中, 几乎处处相等的函数被视作等同, 因此 L^p 空间实际上是几乎处处相等函数的等价类, 但为了方便期间通常不作区分.

定理 A.3.2: L^∞ 范数等价定义

设 (E,μ) 是测度空间, 则

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \ge 0 : \mu(|f| > \alpha) = 0\} = \inf_{\mu(E_0)=0} \sup_{x\in E\setminus E_0} \left|f(x)\right|.$$

证明. 记上式中间为 ξ, 右侧为 η. 则取 $E_0 = \{|f| > \alpha\}$, 其中 $\alpha \ge 0$ 满足 $\mu(E_0) = 0$, 则

$$\eta \le \sup_{E\setminus E_0} \left|f(x)\right| \le \alpha,$$

对 α 取下确界, 得 $\eta \le \xi$. 对任意的 E_0 满足 $\mu(E_0) = 0$, 取 $\alpha_{E_0} = \sup\limits_{x\in E\setminus E_0} \left|f(x)\right|$, 则 $\mu(|f| > \alpha_{E_0}) = 0$, 从而

$$\alpha_{E_0} \ge \xi,$$

在上式中对 E_0 取下确界即得 $\eta \ge \xi$. 因此 $\eta = \xi$. □

引理 A.3.3

设 $1 < p < \infty$, q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则对 $a,b\geq 0$, 有不等式

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

证明. 不妨设 $a,b>0$, 则由 $\log x$ 是凹函数,

$$\log\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab,$$

对上式两边取 e^x 即可. □

定理 A.3.4: Holder 不等式

设 p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 其中 $1\leq p\leq\infty$, f,g 是测度空间 (E,μ) 上的可测函数, 则

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

证明. 不妨设 f,g 均不几乎处处为 0, 则由上一引理, 有

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

上式在 E 上积分, 得

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q} \leq \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q}=1,$$

整理上式就得到 $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\cdot\|g\|_q$. □

定理 A.3.5: Minkowski 不等式

设 $1\leq p\leq\infty$, f,g 是测度空间 (E,μ) 上的可测函数, 则

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明. 不妨设 $1<p<\infty$ (否则是显然的). 由 Holder 不等式,

$$\|f+g\|_p^p = \|(f+g)^p\|_1 \leq \|f\cdot(f+g)^{p-1}\|_1 + \|g\cdot(f+g)^{p-1}\|_1$$

$$\leq \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1},$$

再将上式两端同时除以 $\|f+g\|_p^{p-1}$ 即可. □

定理 A.3.6: L^p 空间的性质

设 $0<p<r<q\leq\infty$，则

(1) $\mathrm{L}^r \subset \mathrm{L}^p + \mathrm{L}^q$.

(2) $\mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^r$.

(3) 若 $\mu(E)<\infty$，则 $\mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^p$.

证明.

(1) 设 $f\in\mathrm{L}^r$, 则 $f\chi_{|f|>1} + f\chi_{|f|\leq 1} \in \mathrm{L}^p + L^q$.

(2) 设 $f\in\mathrm{L}^p\cap\mathrm{L}^q$. 若 $q<\infty$, 则

$$\int_E |f|^r \mathrm{d}\mu \leq \int_{|f|\leq 1} |f|^p \mathrm{d}\mu + \int_{|f|>1} |f|^q \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p^p + \|f\|_q^q < \infty,$$

若 $q=\infty$, 则

$$\int_E |f|^r \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty^{r-p} \int_E |f|^p \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^{r-p} \cdot \|f\|_p^p < \infty.$$

(3) 设 $f\in\mathrm{L}^q$, 则

$$\int_E |f|^p \leq \begin{cases} \int_{|f|\leq 1}|f|^p + \int_{|f|>1}|f|^q \leq \mu(E) + \|f\|_q^q < \infty, & q<\infty, \\ \mu(E)\|f\|_\infty^p < \infty, & q=\infty. \end{cases}$$

□

命题 A.3.7

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 其中 $1\leq q<\infty$. 则

$$\|g\|_q = \sup\left\{\int fg : \|f\|_p = 1\right\}.$$

证明. 记命题中上确界为 M. 任取 $\|f\|_p=1$, 则 $\int fg \leq \|fg\|_1 \leq \|g\|_q$, 故 $M\leq\|g\|_q$. 若 $\|g\|_q=0$，则已经有 $M=\|g\|_q=0$. 若 $\|g\|_q>0$, 取 $f=\|g\|_q^{1-q} g^{q-1}\mathrm{sign}(g)$, 有 $\|f\|_p=1$

且 $\int fg = \|g\|_q$, 从而 $M \geq \|g\|_q$, Q.E.D. □

A.4 L^p 空间中列紧集的刻画

引理 A.4.1

设 $[a,b]$ 是有界闭区间, $x \in C[a,b]$. 则 $\lim\limits_{h\to 0^+} \|x - x_h\|_p = 0$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 是 L^p 范数,

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$

并且 $x(s)$ 在 $s < a$ 时取 $x(a)$, 在 $s > b$ 时取 $x(b)$.

证明. 由第一积分中值定理, $x_h(t) = x(t + \theta_{h,t}), \theta_{h,t} \in [-1,1]$. 而 x 在 $[a,b]$ 上一致连续的, 因此当 $h \to 0$ 时 x_h 在 $[a,b]$ 上一致的趋于 x. 也即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$,

$$|x_h(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], 0 < h < \delta.$$

故

$$\|x - x_h\| = \left(\int_a^b |x_h(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \varepsilon^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon,$$

也即 $\lim\limits_{h\to 0^+} \|x - x_h\|_p = 0$. □

引理 A.4.2

沿用上题定义与记号, 则 $\forall x \in L^p[a,b]$, 都有

$$\|x_h\|_p \leq \|x\|_p.$$

证明. 记 q 使得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则由 Holder 不等式,

$$\begin{aligned}
\|x_h\|_p^p &= \int_a^b \left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)\cdot 1\mathrm{d}s\right|^p \mathrm{d}t \\
&\leq \left(\frac{1}{2h}\right)^p \int_a^b \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{p}} \left(\int_{t-h}^{t+h} 1^q \mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2h}\int_a^b \int_{t-h}^{t+h} |x(s)|^p \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2h}\int_a^b \int_{s-h}^{s+h} |x(s)|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}s = \|x\|_p^p,
\end{aligned}
$$

证毕. □

定理 A.4.3: $L^p[a,b]$ 中集合列紧的充要条件

设 $1<p<\infty$, $[a,b]$ 是有界闭区间, $A\subset L^p[a,b]$. 则 A 在 $L^p[a,b]$ 中列紧的充要条件为

(1) A 在 $L^p[a,b]$ 中有界;

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得 $\|x-x_h\|_p<\varepsilon(\forall x\in A, h\in(0,\delta))$.

证明. 必要性: 由于 A 列紧, 显然也有界. $\forall\varepsilon>0$, 取 $x^1,\cdots,x^n$ 是 A 的 ε 网, 由于 $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密, 不妨设 $x^1,\cdots,x^n\in C[a,b]$. 因为每个 x^k 都是连续的, 故由引理A.4.1, 存在 $\delta>0$(由于 x^k 是有限个, 故这样的 δ 存在) 使得

$$
\left\|x^k-x_h^k\right\|_p<\varepsilon,\quad \forall h\in(0,\delta), k=1,2,\cdots,n.
$$

任取 $x\in A$, 则存在 k 使得 $x\in B(x^k,\varepsilon)$, 从而

$$
\|x-x_h\|_p\le\left\|x-x^k\right\|_p+\left\|x^k-x_h^k\right\|_p+\left\|x_h^k-x_h\right\|_p\le\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,
$$

其中第三项使用了引理A.4.2, 故 A 也满足 (2).

充分性: 首先证明

$$
A_h=\{x_h\in L^p[a,b]:x\in A\}
$$

对任意给定 $h>0$ 是一致有界且等度连续的. 设 $\|x\|_p\le M(\forall x\in A)$. 则由 Holder 不等式可知

$$
\begin{aligned}
|x_h(t)| &= \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(s)\cdot 1\mathrm{d}s\right| \le \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-h}^{t+h}1^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|x|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le (2h)^{-\frac{1}{p}}M,\quad \forall t\in[a,b], x_h\in A_h,
\end{aligned}
$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 故一致有界. 此外, 与上式同理可得

$$\left|x_h(t)-x_h(t')\right| \le \frac{1}{2h}\left(\int_{t'+h}^{t+h}|x|+\int_{t'-h}^{t-h}|x|\right) \le \frac{M}{h}\left|t-t'\right|^{1-\frac{1}{p}}, \quad \forall t,t' \in [a,b],$$

故等度连续. 由 Arzela-Ascoli 定理, A_h 在 $C[a,b]$ 中列紧, 而若点列在 $C[a,b]$ 中收敛, 则必在 $L^p[a,b]$ 中收敛到同一极限, 故 A_h 在 $L^p[a,b]$ 也列紧.

任取 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使得

$$\|x-x_\delta\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A.$$

上式即 A_δ 是 A 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网. 而 A_δ 本身存在有穷 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网 N, 故 N 还是 A 的有穷 ε 网. 因此 A 完全有界, 再由 $L^p[a,b]$ 完备知 A 列紧. □

定理 A.4.4: Sobolev 空间的紧嵌入

记 $W_0^{1,2}[0,1]$ 为 $C_0^1(0,1)$ 在范数

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f|^2+|f'|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in C_0^1(0,1)$$

下的完备化空间. 则 $W_0^{1,2}[0,1]$ 中的单位球在 $L^2[0,1]$ 中是紧集.

证明. 由于集合列紧当且仅当它的闭包紧, 故只需证明

$$S := \{f \in C_0^1(0,1) : \|f\| \le 1\}$$

在 $L^2[0,1]$ 中列紧. 由题目1.3.12, S 在 $C[0,1]$ 中列紧. 从而任取 $\{f_k\}\subset S$, 存在子列 $\{f_{k_j}\}$ 和 $f\in C[0,1]$ 使得 $\left\|f_{k_j}-f\right\|_{C[0,1]} \to 0$, 而 $\|\cdot\|_{L^2[0,1]} \le \|\cdot\|_{C[0,1]}$, 从而 $\left\|f_{k_j}-f\right\|_{L^2[0,1]} \to 0$, 因此 S 在 $L^2[0,1]$ 中列紧. □

A.5 内积空间

定义 A.5.1: 任意项的求和

设 $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in A\}$, f 为定义在 X 上的非负函数, 则记

$$\sum_{\alpha\in A} f(x_\alpha)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} f(x_n): x_1,\cdots,x_n\in X, \forall n\geq 1\right\},$$

称为 f 在 A 上的求和.

☞ 注

不难证明这一定义与有限项求和以及正项级数的定义是一致的.

引理 A.5.2

设 $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in A\}$, f 为定义在 X 上的非负函数, 满足

$$\sum_{\alpha\in A} f(x_\alpha)<\infty,$$

则至多有可数个 α 使得 $f(x_\alpha)>0$.

证明. 反设有不可数个 α 使得 $f(x_\alpha>0)$, 则由

$$\{\alpha\in A: f(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha\in A: f(x_\alpha)>\frac{1}{n}\right\}$$

知右侧集合至少有一个含有无穷多项 (因为左侧是不可数的), 这是不可能的, 因为此时必有 $\sum\limits_{\alpha\in A} f(x_\alpha)=\infty$, 矛盾. □

定理 A.5.3: Bessel 不等式

设 X 是一个内积空间. 设 $S=\{e_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 为标准正交系, 则

$$\sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)|^2\leq \|x\|^2,\quad \forall x\in X,$$

此外, 对每个 x, 至多有可数个 α 使得 (x,e_α) 非零.

证明. 任取 $e_1,\cdots,e_n\subset S$, 注意到

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k, x-\sum_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j\right)=0,$$

因此

$$\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2=\|x\|-\left\|\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|^2\geq 0.$$

则根据求和的定义必然有 $\sum\limits_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leq\|x\|^2$, 从而由上一引理, 使得 (x,e_α) 非零的 α 至多可数个. □

引理 A.5.4: Zorn 引理

设 X 是一个半序集. 如果它的每一个全序子集都有上界, 那么 X 有一个极大元.

☞ **注**

半序集是其上赋予一个半序关系 $\preccurlyeq$, **即满足自反性** $(x\preccurlyeq x)$, **传递性** $(x\preccurlyeq y, y\preccurlyeq z\implies x\preccurlyeq z)$, **反对陈性** $(x\preccurlyeq y, y\preccurlyeq x\implies x=y)$ **的关系.**

全序集: **对任意** $x,y\in X$, **要么** $x\preccurlyeq y$, **要么** $y\preccurlyeq x$.

上界: **设** $X_0\subset X$, **称** x **是** X_0 **的上界, 如果** $y\preccurlyeq x(\forall y\in X_0)$.

极大元: **若** $\forall y\in X$ **满足** $x\preccurlyeq y$ **都有** $x=y$, **则称** x **是** X **的极大元.**

命题 A.5.5: 完备正交集的存在性

非 $\{0\}$ 的内积空间必有完备正交系.

证明. 将内积空间 X 上的所有正交系依据集合的包含关系构成一个半序集类. 每个全序子集必有上界, 就是这些集合之并. 由 Zorn 引理, 这个半序集必有极大元, 记为 S. 则 S 一定是完备的, 也即 $S^\perp=\{0\}$. 否则, 若存在 $x\neq 0$ 且 $x\perp S$, 则 $S\cup\{x\}$ 是一个比 S 更大的正交系, 与 S 是极大元矛盾. □

A.6 线性空间的基本概念

定义 A.6.1: 线性空间

设 X 是一个非空集合. $\mathbb{K}$ 是实数或者复数域, 若满足下列条件:

- X 是 Abel 加法群;
- 定义数乘运算 $\mathbb{K}\times X\to X, (\alpha, X)\mapsto \alpha X$;

并且满足:

- $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, x\in X$;
- $1\cdot x=x, \quad \forall x\in X$;
- $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, x\in X$;
- $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \quad \forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall x,y\in X$.

则称 $(X,\mathbb{K})$ 是一个**线性空间**.

定义 A.6.2: 线性同构

设 $(X_1,\mathbb{K}),(X_2,\mathbb{K})$ 是两个线性空间, 若 $\exists T: X_1\mapsto X_2$, 满足

(1) T 是双射;

(2) $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty\,, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, x,y\in X_1$.

则称 T 是 X_1 到 X_2 的一个**线性同构**.

☞ **注**

此时 $P=T^{-1}$ **也是线性的, 因为** $P(\alpha x'+\beta y')=P(\alpha T(P(x'))+\beta T(P(y')))=P(T(\alpha P(x')+\beta P(y')))=\alpha P(x')+\beta P(y')$.

下面如非特别说明, 均设 $(X,\mathbb{K})$ 是一个线性空间.

定义 A.6.3: 线性子空间

设 $E\subset X$, 若 E 依 X 上的加法, 数乘运算构成线性空间, 则称 E 是 X 的一个**线性子空间**.

☞ **注**

E **是** X **的线性子空间** $\Longleftrightarrow$ E **对** X **中的加法和数乘运算封闭.**

定义 A.6.4: 线性流形

设 $E\subset X$. 若 $\exists x_0\in X$ 及线性子空间 $E_0\subset X$ 使得

$$E=E_0+x_0\triangleq\{x+x_0\mid x\in E_0\},$$

则称 E 为一个**线性流形**(子空间对于某个向量的平移)

命题 A.6.5

线性流形 E 有如下三条等价定义:

(1) $E=x_0+E_0$, 其中 $x_0\in X,E_0$ 是线性子空间;

(2) $\forall x,y\in E,\alpha x+(1-\alpha)y\in E$.

(3) $\forall x_1,\cdots,x_n\in E,\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k=1$, 都有 $\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kx_k\in E$.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 任取 $y,z\in E$, 存在 $y_0,z_0\in E_0$ 使得 $y=x_0+y_0,z=x_0+z_0$, 从而 $\alpha y+(1-\alpha)z=x_0+(\alpha y_0+(1-\alpha)z_0)\in E$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 使用归纳法证明, $n=1$ 和 $n=2$ 的情形是显然的, 现假设对 n 成立. 任取 $x_1,\cdots,x_{n+1}\in E,\sum\limits_{k=1}^{n+1}\alpha_k=1$, 记

$$\beta_1=2\alpha_1x_1+(1-2\alpha_1)x_2,\quad \beta_2=(2\alpha_1+2\alpha_2-1)x_2+\sum_{k=3}^{n+1}2\alpha_kx_k,$$

根据归纳假设, 显然有 $\beta_1,\beta_2\in E$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\alpha_kx_k=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2\in E$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 取 $x_0\in E$, 记 $E_0=E-x_0$, 只需证 E_0 是线性子空间. 事实上, 任取 $y,z\in E,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 都有 $(1-\alpha-\beta)x_0+\alpha y+\beta z\in E$, 从而 $\alpha(y-x_0)+\beta(z-x_0)=\big((1-\alpha-\beta)x_0+\alpha y+\beta z\big)-x_0\in E_0,E_0$ 是线性子空间. □

性质 A.6.6: 线性流形

(1) 设 E,F 是线性流形, 则 $E+F=\{x+y\mid x\in E,y\in F\}$ 是线性流形.

(2) 设 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族线性流形, 若它们的交集不空, 则交集 $\bigcap\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$ 仍是线性流形.

证明.

(1) 任取 $z_1,z_2\in E+F$, 存在 $x_1,x_2\in E, y_1,y_2\in F$ 使得 $z_1=x_1+y_1, z_2=x_2+y_2$. 故 $\alpha z_1+(1-\alpha)z_2=\big(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\big)+\big(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\big)\in E+F$.

(2) 由线性流形的第二条等价定义易得.

□

定义 A.6.7: 线性相关与线性无关

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$ 是 X 中一组向量, 若 $\exists\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ 且它们不全为 0, 使得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0,$$

则称这组向量是**线性相关**的. 若不然, 称它们是**线性无关**的.

定义 A.6.8: 线性基

若 A 是 X 中一个极大线性无关向量组, 即 A 中向量线性无关, 且 $\forall x\in X$,x 均可由 A 中向量线性表出, 则称 A 是 X 的一组**线性基**.

定义 A.6.9: 维数

线性空间中任意一组线性基的势称为线性空间的**维数**.

定义 A.6.10: 线性包

设 Λ 是一个指标集,$\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 中的一族向量, 则称集合

$$\{y=\alpha_1x_{\lambda_1}+\cdots+\alpha_nx_{\lambda_n}|\lambda_i\in\Lambda,\alpha_i\in\mathbb{K},i=1,2,3,\cdots,n\}$$

为 $\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 的**线性包**, 显然线性包是一个线性空间, 而且是包含这族向量的最小线性子空间. 因此我们称线性包为这族向量张成的线性子空间, 记为 $\mathrm{span}\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$.

定义 A.6.11: 线性和与直和

设 E_1,E_2 是 X 的子空间, 称集合 $\{x+y\mid x\in E_1,y\in E_2\}$ 为 E_1,E_2 的**线性和**, 记为 E_1+E_2, 任意有限个子空间的线性和可以同理定义. 特别的, 如果 (E_1,E_2) 中的任意一对非零向量均线性无关, 则称 E_1+E_2 为**直和**, 记作 $E_1\oplus E_2$. 此时 $E_1\cap E_2=0$, 且 $\forall x\in E_1\oplus E_2$, x 有唯一分解 $x=x_1+x_2, x_1\in E_1, x_2\in E_2$.

☞ **注**

(E_1, E_2) 中的任意一对非零向量线性无关 $\Longleftrightarrow$ 零向量的分解方式唯一 $\Longleftrightarrow$ $E_1 \cap E_2 = 0$ 且 $\forall x \in E_1 \oplus E_2$, x 有唯一分解.

A.7 凸集与不动点

定义与基本性质

定义 A.7.1: 凸集

设 X 是线性空间, $E \subset X$, 称 E 为一**凸集**, 如果

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in E, \quad \forall 0 \le \lambda \le 1, \forall x, y \in E.$$

命题 A.7.2

若 $\{E_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是线性空间 X 中一族凸集, 则 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ 也是凸集.

证明. 根据凸集的定义易得. □

定义 A.7.3: 凸包和凸组合

设 X 是线性空间, $A \subset X$. 若 $\{E_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为 X 中包含 A 的一切凸集全体, 那么称 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ 为 A 的**凸包**, 并记作 $\mathrm{co}(A)$. 又对 $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$, 称 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**凸组合**, 是指其中系数满足 $\lambda_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

命题 A.7.4

设 X 是线性空间, $A \subset X$, 那么 A 的凸包是 A 中元素任意凸组合的全体, 即

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, x_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

证明. 记右侧集合为 B, 显然 B 是包含 A 的凸集, 因此 $\mathrm{co}(A) \subset B$. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in B\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in A, \lambda_i \ge 0, 1 \le i \le n\right) \in B$, 则由 $x_i \in \mathrm{co}(A)$ 且 $\mathrm{co}(A)$ 是凸集知 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{co}(A)$, 故 $B \subset \mathrm{co}(A)$. □

定义 A.7.5: Minkowski 泛函

设 X 是线性空间, C 是 X 上含有 0 的凸子集, 在 X 上规定一个取值于 $[0,\infty]$ 的函数

$$P(x)=\inf\left\{\lambda>0\,\middle|\,\frac{x}{\lambda}\in C\right\},\quad \forall x\in X$$

与 C 对应, 称函数 P 为 C 的**Minkowski 泛函**.

命题 A.7.6

设 X 是线性空间, C 是 X 上含有 0 的凸子集, 若 P 为 C 的 Minkowski 泛函, 则 P 具有下列性质:

(1) $P(x)\in[0,\infty], P(0)=0$;

(2) $P(\lambda x)=\lambda P(x)\quad (\forall x\in X,\forall\lambda>0)$ *(正齐次性);*

(3) $P(x+y)\le P(x)+P(y)\quad (\forall x,y\in X)$ *(次可加性);*

证明. 只需验证 (3). 任取 $\varepsilon>0$, 都有

$$\begin{aligned}&\frac{x}{P(x)+\varepsilon},\frac{y}{P(y)+\varepsilon}\in C\\ \Longrightarrow\ &\frac{x+y}{P(x)+P(y)+2\varepsilon}\\ =&\frac{P(x)+\varepsilon}{P(x)+P(y)+2\varepsilon}\cdot\frac{x}{P(x)+\varepsilon}+\frac{P(y)+\varepsilon}{P(x)+P(y)+2\varepsilon}\cdot\frac{y}{P(y)+\varepsilon}\in C,\end{aligned}$$

故 $P(x+y)\le P(x)+P(y)+2\varepsilon$. □

定义 A.7.7: 吸收与对称

线性空间 X 中, 含有 0 的凸集 C 称为是**吸收的**, 如果 $\forall x\in X,\exists\lambda>0$, 使得 $\frac{x}{\lambda}\in C$; 称 C 是**对称的**, 如果 $x\in C\implies -x\in C$.

命题 A.7.8

C 是吸收凸集 $\iff$ 其 Minkowski 泛函 $P(x)$ 是实值函数; 若 C 是对称凸集, 则 $P(x)$ 是实齐次的, 也即

$$P(\alpha x)=|\alpha|P(x),\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

证明. 若 C 是吸收凸集, 则 $\forall x\in X$, 存在 $\lambda>0$ 使得 $\frac{x}{\lambda}\in C$, 从而 $P(x)\le\lambda<\infty$, 故 $P(x)$

是实值函数.

若 $P(x)$ 是实值函数, 则任取 $x \in X$, 取 $\lambda = P(x)+1 > 0$, 有 $\frac{x}{\lambda} \in C$.

若 C 是对称的, 则 $P(x) = P(-x)$, 再由正齐次性可得实齐次性. □

定义 A.7.9: 均衡

复线性空间 X 的一个子集 C 称为是**均衡的**, 是指

$$x \in C \implies \alpha x \in C \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1).$$

命题 A.7.10

设 X 是一个 B^* 空间, C 是一个含有 0 点的闭凸集. 如果 $P(x)$ 是 C 的 Minkowski 泛函, 那么 $P(x)$ 下半连续并且

$$\alpha C = \{x \in X \mid P(x) \le \alpha\}, \quad \forall \alpha > 0.$$

此外, 若 C 有界, 则 $P(x) = 0 \iff x = 0$. 若 $0 \in C^\circ$, 那么 C 是吸收的, 并且一致连续.

证明. 若 $x \in \alpha C$, 则 $\frac{x}{\alpha} \in C$, 故 $P(x) \le \alpha$. 反之, 若 $P(x) \le \alpha$, 则 $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{n}} \in C(\forall n)$, 由于 C 是闭集, 令 $n \to \infty$ 可得 $\frac{x}{\alpha} \in C$, 即 $x \in \alpha C$. 由 C 为闭集可知,$\{x \in X \mid P(x) \le \alpha\} = \alpha C$ 也是闭集, 从而 P 下半连续.

若 C 有界, 不妨设 $\|x\| < M, \forall x \in C$. 则 $P(x) = 0 \implies \lambda x \in C(\forall \lambda > 0) \implies M\frac{x}{\|x\|} \in C \implies x = 0$. 此时 $P(x)$ 是一致连续的, 因为 $P(x)$ 是满足 $P(x) = 0 \iff x = 0$ 的次线性泛函.

若 $0 \in C^\circ$, 则存在 $r > 0$, 使得 $\|x\| \le r \implies x \in C$. 则任取 $y \in X$, 都有 $\frac{y}{\frac{1}{r}\|y\|} \in C$. 此时 $P(x)$ 也是一致连续的, 因为

$$\left|P(x) - P(y)\right| \le \max\{P(x-y), P(y-x)\} \le \frac{2}{r}\|x-y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

□

定义 A.7.11: 同胚

设 $(X_1,\|\cdot\|_1),(X_2,\|\cdot\|_2)$, 若存在双射 $f:X_1\to X_2$ 使得 f 和 f^{-1} 都连续, 则称 X_1,X_2 同胚, 称 f 为同胚映射.

推论 A.7.12

若 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空紧凸子集, 则必存在正整数 $m\le n$, 使得 C 同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的闭单位球.

证明. 由于 $\mathbb{R}^n$ 中的线性变换和平移变换均为同胚映射, 因此不妨设 $0\in C^\circ$ 并且 $\operatorname{span}(C)=\mathbb{R}^n$(否则取 $x\in C$, 并记 $C'=C-x$, 此时 $0\in C'$. 再记 $E=\operatorname{span}(C')$, 维数为 m, 必存在可逆线性变换 L 使得 $e_1,\cdots,e_m\in L(C')\subset L(E)$. 此时由 $L(C')$ 的凸性, $\frac{1}{2m}\sum\limits_{i=1}^m e_i\in L(C')$. 记 $C''=L(C')-\frac{1}{2m}\sum\limits_{i=1}^m e_i\ni 0$, 则当 $\sum\limits_{i=1}^m|x_i|^2\le\frac{1}{4m^2}$ 时有

$$x=\left(1-\sum_{i=1}^m\left(\frac{1}{2m}+x_i\right)\right)\cdot 0+\sum_{i=1}^m(\frac{1}{2m}+x_i)e_i-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^m e_i\in C'',$$

因此 $0\in C''^\circ$, 在 $L(E)$ 上考虑 C'' 即可).

下面证明

$$f(x)=\begin{cases}\frac{P(x)x}{|x|}, & x\in C\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是从 C 到 $D=\{|x|\le 1\}$ 的同胚映射.

首先, 由 $x\in C\iff P(x)\le 1$ 可知 $\left|f(x)\right|\le 1$, 因此 f 的确是从 C 到 D 的映射. 令

$$g(y)=\begin{cases}\frac{|y|y}{P(y)}, & 0<\left|y\right|\le 1\\ 0, & y=0\end{cases},$$

不难验证 $f(g(y))=y,g(f(x))=x$, 因此 f 是双射且 $g=f^{-1}$.

其次证明 f 连续. 由 $P(x)$ 连续知当 $x\ne 0$ 时 $f(x)$ 连续, 当 $x=0$ 时,

$$x_n\to 0\implies P(x_n)\to 0\implies\lim_{n\to\infty}\left|\frac{P(x_n)x_n}{|x_n|}\right|=\lim_{n\to\infty}P(x_n)=0,$$

因此在 0 处 $f(x)$ 也连续.

最后证明 g 连续. 当 $y \neq 0$ 时 g 也显然连续. 当 $y=0$ 时, 设 $|x|<R, \forall x \in C$. 则 $\frac{Rx}{|x|} \notin C \implies P(x) \geq \frac{|x|}{R} (\forall x \in C)$, 故

$$y_n \to 0 \implies \lim_{n\to\infty} \left| \frac{|y_n| y_n}{P(y_n)} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|y_n|^2}{\frac{|y_n|}{R}} = R \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0,$$

因此 g 连续. □

Brouwer 与 Schauder 不动点定理

定理 A.7.13: Brouwer 不动点定理

设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球, 又设 $T: B \to B$ 是一个连续映射, 那么 T 必有一个不动点 $x \in B$.

证明. 该定理属于拓扑的内容, 在此不作讨论. □

推论 A.7.14

设 C 是有限维赋范线性空间 X 中的一个紧凸子集, $T: C \to C$ 是连续的, 则 T 必有一个在 C 上的不动点.

证明. 设 φ 是从 C 到 $\mathbb{R}^m$ 中闭单位球 B 的同胚映射. 则 $T_\varphi = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$ 是从 B 到本身的连续映射, 则必存在 $x \in B$ 使得 $T_\varphi(x) = x$, 从而 $T(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x)$, $\varphi^{-1}(x)$ 是 T 的不动点. □

定理 A.7.15: Schauder 不动点定理

设 C 是 B^* 空间 X 中的闭凸子集, $T: C \to C$ 连续且 $T(C)$ 列紧, 则 T 在 C 上必有一个不动点.

证明. 由 $T(C)$ 列紧知, 对任意的 $n \geq 1$, 存在 $T(C)$ 的有限 $\frac{1}{n}$ 网 N_n 使得

$$T(C) \subset \bigcup_{y \in N_n} B\left(y, \frac{1}{n}\right).$$

记 $E_n=\operatorname{span}(N_n)$ 为有限维子空间. 令 $T_n:C\to \operatorname{co}(N_n)$ 满足

$$T_n(x)=\frac{\sum\limits_{y\in N_n}\left(\|Tx-y\|+1\right)Xi_{B(y,\frac{1}{n})}(Tx)y}{\sum\limits_{y\in N_n}\left(\|Tx-y\|+1\right)\chi_{B(y,\frac{1}{n})}(Tx)}.$$

则显然有

$$\|T(x)-T_n(x)\|\le\frac{\sum\limits_{y\in N_n}\left(\|Tx-y\|+1\right)\chi_{B(y,\frac{1}{n})}(Tx)\|T(x)-y\|}{\sum\limits_{y\in N_n}\left(\|Tx-y\|+1\right)\chi_{B(y,\frac{1}{n})}(Tx)}\le\frac{1}{n},\quad \forall x\in C.$$

注意到 $\operatorname{co}(N_n)$ 是有限维空间 E_n 中的有界闭凸集 (紧凸集), $T_n:\operatorname{co}(N_n)\to\operatorname{co}(N_n)$ 连续 ($\|T_n(x)-T_n(x')\|\le\|x-x'\|,\forall x,x'\in C$), 则存在 $x_n\in\operatorname{co}(N_n)$ 使得 $T_n(x_n)=x_n$. 由于 $T(C)$ 是列紧的, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $T(x_{n_k})\to x\in C$. 此外,

$$\begin{aligned}\|x-x_{n_k}\|=\|x-T_{n_k}(x_{n_k})\|&\le\|x-T(x_{n_k})\|+\|T(x_{n_k})-T_{n_k}(x_{n_k})\|\\&\le\|x-T(x_{n_k})\|+\frac{1}{n_k}\to 0,\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

因此 $x_{n_k}\to x$, 再由 T 的连续性,$T(x_{n_k})\to T(x)$, 从而

$$\begin{aligned}\|T(x)-T_{n_k}(x_{n_k})\|&\le\|T(x)-T(x_{n_k})\|+\|T(x_{n_k})-T_{n_k}(x_{n_k})\|\\&\le\|T(x)-T(x_{n_k})\|+\frac{1}{n_k}\to 0,\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

最后, 在 $T_{n_k}(x_{n_k})=x_{n_k}$ 等式两端令 $k\to\infty$ 可得 $T(x)=x$, 也即 x 是 C 的不动点. □

定义 A.7.16: 紧映射

设 X 是 B^* 空间, E 是 X 的一个子集，称映射 $T:E\to X$ 是**紧的**, 如果它是连续的, 并且把 E 中的任意有界集映为 X 中的列紧集.

推论 A.7.17

设 C 是 B^* 空间 X 中的有界闭凸子集, $T:C\to C$ 是紧的, 则 T 在 C 上必有不动点.

证明. 由 T 是紧映射, C 有界知 $T(C)$ 列紧, 从而由 Schauder 不动点定理知 T 在 C 上存在不动点. □

应用

定理 A.7.18: Caratheodory 定理

假设函数 $f(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-b,\xi+b]$ 上连续, $\left|f(t,x)\right|\leq M(\forall|t|\leq h,|x-\xi|\leq b,$ 那么当 $h\leq\frac{b}{M}$ 时, 方程的初始值问题

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(0)=\xi \end{cases}$$

在 $[-h,h]$ 上存在解 $x(t)$.

证明. 只需证明积分方程

$$x(t)=\xi+\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

在 $t\in[-h,h]$ 上存在连续解 $x(t)$. 记

$$X=\{x\in C([-h,h]):|x(t)-\xi|\leq b,\forall|t|\leq h\},$$

并令 $T:X\to C([-h,h])$ 满足

$$Tx(t)=\xi+\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s,\forall|t|\leq h,x\in C([-h,h]).$$

下面证明 T 在 X 上存在不动点. X 显然是有界闭凸集, 并且由

$$|Tx(t)-\xi|=\left|\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\leq hM\leq b,\quad\forall|t|\leq h,x\in X$$

知 $T:X\to X$. 注意到

$$\left|Tx(t)-Tx(t')\right|=\left|\int_{t'}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\leq M\left|t-t'\right|,\quad\forall t,t'\in[-h,h],x\in X,$$

故 $T(X)$ 等度连续, 并且 $T(X)$ 显然一致有界, 由 Arzela-Ascoli 定理可得 $T(X)$ 列紧, 再由 Schauder 不动点定理得 T 在 X 上存在不动点, 也即初值问题有解. □

A.8 紧算子的不变子空间与紧算子结构

不变子空间

定义 A.8.1: 不变子空间

设 X 为 Banach 空间, M 是 X 的子空间, $A \in L(X)$. 若 $A(M) \subset M$, 则称 M 是 A 的**不变子空间**.

命题 A.8.2

设 X 是 Banach 空间, $A \in L(X)$, 则

(1) $\{0\}$ 和 X 都是 A 的不变子空间.

(2) 若 M 是 A 的不变子空间, 则 $\overline{M}$ 也是 A 的不变子空间.

(3) 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 即 λ 是 A 的特征值, 则 $N(\lambda I - A)$ 是 A 的不变子空间.

(4) $\forall y \in X$, 若记 $L_y \triangleq \{P(A)y : P$ 是任意多项式$\}$, 则 L_y 是 A 的不变子空间.

证明. 显然. □

定理 A.8.3

若 $\dim X \geq 2$, 则 $\forall A \in \mathfrak{C}(X)$, A 必有非平凡闭不变子空间.

证明. 不妨设 $\dim X = \infty, A \neq 0$ 且 $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \varnothing$(否则定理显然成立). 由定理3.3.1, $\sigma(A) = \{0\}$. 若 A 没有非平凡闭不变子空间, 则

$$\overline{L_y} = X, \quad \forall y \in X \setminus \{0\}.$$

不妨设 $\|A\| = 1$, 那么存在 $x_0 \in X$ 使得

$$\|Ax_0\| > 1 \quad 且 \quad \|x_0\| > 1.$$

令 $C \triangleq \overline{AB(x_0,1)}$, 则 C 是紧集并且 $0 \notin C$. $\forall y_0 \in C$, 由于 $\overline{L_{y_0}} = X$, 存在关于 A 的多项

式算子 T_{y_0} 使得

$$\left\|T_{y_0}y_0 - x_0\right\| < 1,$$

从而由 $\delta_{y_0} > 0$ 使得

$$\left\|T_{y_0}y - x_0\right\| < 1, \quad \forall y \in B(y_0, \delta_{y_0}).$$

由于 C 是紧集, 存在有限覆盖

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta_i), \quad 其中\delta_i \triangleq \delta_{y_i}(i = 1, \cdots, n).$$

从而 $\forall y \in C$, 存在 i_1 使得

$$\left\|T_{i_1}y - x_0\right\| < 1.$$

上式蕴含 $T_{i_1}y \in B(x_0, 1)$, 故 $AT_{i_1}y \in C$, 因此存在 i_2 使得

$$\left\|T_{i_2}AT_{i_1}y - x_0\right\| < 1.$$

由于 T_{i_1} 和 T_{i_2} 都是 A 的多项式, 因此可交换, 即

$$\left\|T_{i_2}T_{i_1}Ay - x_0\right\| < 1.$$

以此类推, 有

$$\left\|\prod_{j=1}^{k+1} T_{i_j}(A^k y) - x_0\right\| < 1 \Longrightarrow \left\|\prod_{j=1}^{k+1} T_{i_j}(A^k y)\right\| > \|x_0\| - 1.$$

记 $\mu = \max\limits_{1\le i\le n} \|T_i\| > 0$, 则

$$\|x_0\| - 1 \le \mu^{k+1}\left\|A^k y\right\|,$$

因此

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\|x_0\| - 1}{\mu\|y\|}\right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\frac{\left\|A^k y\right\|}{y}\right)^{\frac{1}{k}}) \le \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}.$$

在上式中令 $k \to \infty$, 根据 Gelfand 定理, $0 < \frac{1}{\mu} \le r_\sigma(A) = 0$, 矛盾. □

紧算子的结构

命题 A.8.4

设 X 是赋范空间, $T\in L(X)$. 则

$$\{0\}\subset N(T)\subset N(T^2)\subset\cdots\subset N(T^k)\subset\cdots,$$

$$X\supset R(T)\supset R(T^2)\supset\cdots\supset R(T^m)\supset\cdots.$$

并且一旦有 $N(T^k)=N(T^{k+1})$, 就有 $N(T^n)=N(T^k),\forall n>k$; 一旦有 $R(T^m)=R(T^{m+1})$, 就有 $R(T^n)=R(T^m),\forall n>m$.

证明. 第一部分的包含关系是显然的. 对于第二部分, 若 $N(T^k)=N(T^{k+1})$, 则

$$\begin{aligned}x\in N(T^{k+2})&\implies T^{k+1}(Tx)=0\implies Tx\in N(T^{k+1})=N(T^k)\\&\implies T^{k+1}x=T^k(Tx)=0\implies x\in N(T^{k+1})=N(T^k),\end{aligned}$$

因此可以递推地得到 $N(T^n)=N(T^k),\forall n>k$.

若 $R(T^m)=R(T^{m+1})$, 则 $\forall T^{m+2}x\in R(T^{m+2})$, 存在 $y\in X$ 使得 $T^my=T^{m+1}x$, 从而 $T^{m+2}x=T^{m+1}y\in R(T^{m+1})=R(T^m)$, 故 $R(T^n)=R(T^m),\forall n>m$. □

定义 A.8.5: 零链长和像链长

设 $T\in X$, 则使得 $N(T^p)=N(T^{p+1})$ 成立的最小整数 p 称为 T 的**零链长**, 记为 $p(T)$. 使得 $R(T^q)=R(T^{q+1})$ 成立的最小整数 q 为**像链长**, 记为 $q(T)$.

☞ **注**

为了方便起见, **记** $N(T^0)=\{0\},R(T^0)=X$.

定义 A.8.6: 余维数

设 $M\subset X$ 是一个闭子空间, 称

$$\operatorname{codim}M\triangleq\dim(X/M)$$

为 M 的**余维数**.

定理 A.8.7

设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$, 则

$$\dim N(T) = \operatorname{codim} R(T) < \infty.$$

证明. 由 Riesz-Fredholm 定理 (定理3.2.5) 证明过程的第四步可知,

$$X = N(T) \oplus X_1 = \operatorname{span}\{y_k\}_1^n \oplus R(T), \quad n = \dim N(T).$$

因此

$$\operatorname{codim} R(T) = \dim(\operatorname{span}\{y_k\}_1^n) = n = \dim N(T).$$

□

引理 A.8.8

设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$. 则 $p = q < \infty$, 其中 p, q 分别为 T 的零链长和像链长.

证明. 首先证明 $q < \infty$. 反设 $q = \infty$, 则 $R(T^{k+1}) \subsetneqq R(T^k), \forall k \geq 0$. 注意到

$$I - T^k = I - (I - A)^k = I - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-A)^j = -\left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j A^{j-1} \right) A \in \mathfrak{C}(X),$$

故由定理3.2.2知每个 $R(T^k)$ 都是闭线性空间. 因此根据 Riesz 引理 (引理1.5.11) 知, 存在 $x_k \in R(T^k) \setminus R(T^{k+1})$ 使得

$$\rho(x_k, R(T^{k+1})) \geq \frac{1}{2} \quad 且 \quad \|x_k\| = 1.$$

但是由于 $Tx_k - x_{k+j} + Tx_{k+j} \in R(T^{k+1})$,

$$\left\| Ax_k - Ax_{k+j} \right\| = \left\| x_k - \left(Tx_k - x_{k+j} + Tx_{k+j} \right) \right\| \geq \frac{1}{2},$$

与 A 是紧算子矛盾.

下面证明 $p=q$. 由定理A.8.7知,

$$\dim N(T^q)=\operatorname{codim}R(T^q)=\operatorname{codim}R(T^{q+1})=\dim N(T^{q+1}),$$

因此 $p\leq q$. 同理可得 $p\geq q$, 因此 $p=q$. □

定理 A.8.9

设 $A\in\mathfrak{C}(X), T=I-A$, 则存在 $p\geq 0$ 使得 $X=N(T^p)\oplus R(T^p)$, 并且 $T_1\triangleq T|_{R(T^p)}$ 存在有界线性逆算子.

证明. 取 p 为 T 的零链长, 由上一引理, 这也是 T 的像链长.

首先证明 $N(T^p)+R(T^p)$ 是直和, 也即 $N(T^p)\cap R(T^p)=\{0\}$. 设 $x\in N(T^p)\cap R(T^p)$, 则存在 $y\in X$ 使得 $x=T^py$, 并且 $T^px=0$. 因此 $T^{2p}y=T^px=0$, 也即 $y\in N(T^{2p})=N(T^p)$, 故 $x=T^py=0$.

下面证明 $X=N(T^p)\oplus R(T^p)$. 任取 $x\in X$, 由于

$$T^px\in R(T^p)=R(T^{2p}),$$

因此存在 $u\in X$ 使得 $T^{2p}u=T^px$. 此即 $T^p(x-T^pu)=0$, 从而 $x-T^pu\in N(T^p), T^pu\in R(T^p)$.

最后证明 $T_1\triangleq T|_{R(T^p)}$ 存在有界线性逆算子. 注意到 $R(T_1)=T(R(T^p))=R(T^{p+1})=R(T^p)=D(T_1)$, 因此 T_1 是满射. 此外, 若 $T_1x=0, x\in R(T^p)$, 则存在 $y\in X$ 使得 $x=T^py$, 故 $T_1x=T^{p+1}y=0\implies y\in N(T^{p+1})=N(T^p)\implies x=T^py=0\implies T_1$ 是单射. 由 Banach 逆算子定理, T_1 存在有界逆. □

A.9 Lebesgue 微分定理

定义 A.9.1

设 $1 \le p \le \infty$, 记 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 为满足

$$\int_K |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty, \quad \forall \text{ 紧集 } K \subset \mathbb{R}^n$$

的可测函数 f 全体.

定义 A.9.2: Harddy-Littlewood 极大函数

设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 记

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)| \mathrm{d}y,$$

并称为**Hardy-Littlewood 极大函数**.

定理 A.9.3: Lebesgue 微分定理

设 $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, 则

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \mathrm{d}y = 0 \ \ a.e.$$

证明. 该定理的证明将分为七步进行.

第一步. 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一族覆盖 E 的有界开球. 则存在互不相交的至多可数个 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 中的开球 $B_1, B_2, \cdots$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \ge 5^{-n} m(E). \tag{$*$}$$

证明. 取 B_1 使得

$$\mathrm{diam} B_1 \ge \frac{1}{2} \sup \mathrm{diam}\{B_\alpha : \alpha \in A\},$$

并取 $B_k(k>1)$ 使得

$$\mathrm{diam}B_k \geq \frac{1}{2}\sup\mathrm{diam}\{B_\alpha : \alpha\in A \text{ 且} B_\alpha \text{ 与} B_1,\cdots,B_{k-1} \text{ 互不相交}\}.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(B_k)=\infty$, 则 $(*)$ 式显然成立. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(B_k)<\infty$, 则 $m(B_k)\to 0$. 记与 B_k 有相同中心点但是半径扩大至 5 倍的开球为 B_k^*, 此时必有

$$B_\alpha \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^*, \quad \forall \alpha\in A.$$

否则, 若 B_α 是不满足上述条件的开球, 则存在 k 使得 $\mathrm{diam}B_{k+1}<\frac{1}{2}\mathrm{diam}B_\alpha$. 从而

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}B_\alpha &> 2\mathrm{diam}B_{k+1}\\ &\geq \sup\mathrm{diam}\{B_\alpha : \alpha\in A \text{ 且} B_\alpha \text{ 与} B_1,\cdots,B_{k-1} \text{ 互不相交}\},\end{aligned}$$

故 B_α 必与某个 B_k 相交, 也就包含于某个 B_k^*, 矛盾. 从而

$$m(E)\leq m(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha)\leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^*)=5^n\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k).$$

第二步. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则存在仅与 n 有关的常数 A 使得

$$m(\{x : Mf(x)>\alpha\})\leq \frac{A}{\alpha}\|f\|_1, \quad \forall \alpha>0.$$

证明. 给定 $\alpha>0$, 记 $E_\alpha=\{x : Mf(x)>\alpha\}$, $\lambda(\alpha)=m(E_\alpha)$. 任取 $x\in E_\alpha$, 则存在 $r_x>0$ 使得

$$\int_{B(x,r_x)}|f(y)|\mathrm{d}y>\alpha B(x,r_x),$$

并且 $E_\alpha=\bigcup\limits_{x\in E_\alpha} B(x,r_x)$. 从而由第一步知, 存在互不相交的开球 $B_1,B_2,\cdots,B_k,\cdots$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)\geq 5^{-n}m(E_\alpha).$$

故

$$\|f\|_1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} |f(y)|\mathrm{d}y > \alpha \sum_{k=1}^{\infty} B_k \geq 5^{-n} \alpha m(E_\alpha).$$

第三步. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, 则存在仅与 n 和 p 有关的常数 A_p 使得

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

证明. 若 $p < \infty$, 令

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0, & |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases},$$

则 $f_\alpha \in L^1$ 且 $|f| \leq |f_\alpha| + \frac{\alpha}{2}$. 从而由第二步

$$\begin{aligned} m(E_\alpha) &= m(\{x : Mf(x) > \alpha\}) \\ &\leq m(\{x : Mf_\alpha(x) > \frac{\alpha}{2}\}) \\ &\leq \frac{2A}{\alpha} \|f_\alpha\|_1 = \frac{2A}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f|. \end{aligned}$$

记 $\lambda(\alpha) = m(E_\alpha)$, 则

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p^p &= -\int_0^\infty \alpha^p \mathrm{d}\lambda(\alpha) = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) \mathrm{d}\alpha \\ &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \frac{2A}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)| \mathrm{d}x \mathrm{d}\alpha \\ &= 2Ap \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x \\ &= 2Ap \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \frac{(2|f(x)|)^{p-1}}{p-1} \mathrm{d}x \\ &= 2^p \frac{Ap}{p-1} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

若 $p = \infty$, 显然有

$$Mf(x) \leq \|f\|_\infty \Longrightarrow \|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

第四步. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, 则存在仅与 n 和 p 有关的常数 C_p 使得

$$m(\{x : Mf(x) > \alpha\}) \leq \left(\frac{C_p}{\alpha}\|f\|_p\right)^p, \quad \forall \alpha > 0.$$

证明. $p = 1$ 的情形由第二步易知, 若 $p > 1$, 由第三步,

$$\left(A_p\|f\|_p\right)^p \geq \|Mf\|_p^p \geq \int_{Mf>\alpha}(Mf)^p \geq \alpha^p m(\{x : Mf(x) > \alpha\}).$$

第五步. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, 则

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y = f(x) \ \text{a.e.}$$

证明. 若 $p < \infty$, 记

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y.$$

给定 $\varepsilon > 0$, 取 $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|f - g\|_p < \varepsilon$. 由 g 的连续性可知, 任取 $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 存在 $r > 0$ 使得当 $|x - y| < r$ 时都有 $|g(x) - g(y)| < \delta$. 从而

$$|A_r g(x) - g(x)| \leq \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|y < \delta,$$

令 $r \to 0$ 并由 δ 的任意性知当 $r \to 0$ 时 $A_r g(x) \to g(x)$. 故

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}|A_r f(x) - f(x)| \\
\leq &\limsup_{r\to 0}(|A_r(f-g)(x)| + |A_r g(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|) \\
\leq &M(f-g)(x) + |f-g|(x).
\end{aligned}$$

此外由第四步知,

$$\{x : M(f-g)(x) > \alpha\} \leq \left(\frac{C_p}{\alpha}\|f-g\|_p\right)^p \leq \left(\frac{C_p\varepsilon}{\alpha}\right)^p.$$

若记

$$
\begin{aligned}
&F_\alpha = \{x : \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\},\\
&G_\alpha = \{x : M(f-g)(x) > \alpha\},\\
&H_\alpha = \{|f-g|(x) > \alpha\},
\end{aligned}
$$

则 $F_\alpha \subset G_{\frac{\alpha}{2}} \cup H_{\frac{\alpha}{2}}$. 注意到 $\alpha^p m(H_\alpha) \le \int_{\mathbb{R}^n} |f-g|^p \le \varepsilon^p$, 从而

$$
m(F_\alpha) \le m(G_{\frac{\alpha}{2}}) + m(H_{\frac{\alpha}{2}}) \le \left(\frac{2C_p\varepsilon}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha}\right)^p.
$$

由 ε 的任意性可知, $m(F_\alpha) = 0$, $\alpha > 0$, 此情形得证.

若 $p = \infty$, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. 与上一种情形类似的讨论可知,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)\|\\
\le& M(f-g)(x) + |f-g|(x)\\
\le& \|f-g\|_\infty + |f-g|(x) \le \varepsilon + |f-g|(x).
\end{aligned}
$$

此外, 注意到 $|f-g|(x) \le \|f-g\|_\infty < \varepsilon$ a.e., 证毕.

第六步. 设 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, 则

$$
\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) y = f(x) \ \text{a.e.}
$$

证明. 任取 $\mathbb{R}^n$ 中紧集 K, 存在正整数 N 使得 $K \subset [-N,N]^n$, 则 $f\chi_{[-N,N]^n} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 记 $J_N = \{x : A_r(f\chi_{[-N,N]^n})(x) \not\to f(x)\}$. 由第五步知, $m(J_N) = 0$, 从而

$$
m(\{x : A_r f(x) \not\to f(x)\}) \le \sum_{N=1}^\infty m(J_N) = 0.
$$

第七步. 设 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, 则

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|y = 0 \ \text{a.e.}$$

证明. 任取 $c \in \mathbb{Q}$, $|f-c| \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 由第五步,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-c|y = |f(x)-c| \ \text{a.e.}$$

记使得上式不成立的点所成集合为 L_c, 则 $m(L_c) = 0$, $\forall c \in \mathbb{Q}$. 又记 $L = \bigcup\limits_{c\in\mathbb{Q}} L_c$, 则根据有理数集的可数性知 $m(L) = 0$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $c \in \mathbb{Q}$ 使得 $|f(x)-c| < \varepsilon$, 故

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|y \\
\le&\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} (|f(y)-c|+|c-f(x)|)y \\
=&2|f(x)-c| \le 2\varepsilon \ \text{a.e.,}
\end{aligned}$$

最后由 ε 的任意性即得. □

附录 B 教材习题答案

B.1 度量空间

B.1.1 压缩映像原理

✍ **题目1.1.1.** 证明：完备度量空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.

解答. 设 X 是一个完备度量空间, X_1 是它的子空间. 若 X_1 是闭集, 设 x_n 是 X_1 中的基本列, 则必然收敛于 X 中的点 x, 由闭集定义知 $x \in X_1$, 因此 X_1 中的基本列收敛, X_1 是完备空间.

反之, 若 X_1 是完备的, 设 x_n 为 X_1 中的点列, 收敛于 X 中的点 x, 则当 $n \to \infty$ 时对任意的 p 都有 $\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_{n+p}, x) \to 0$, 故 x_n 是基本列.

✍ **题目1.1.2.** 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微实值函数,$\hat{x} \in (a,b)$ 使得 $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证: 存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$, 使得 $\forall x_0 \in U(\hat{x})$, 迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

是收敛的, 并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}.$$

解答. 令 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 则 $\varphi' = \frac{ff''}{(f')^2}$. 由 $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$ 且 f 二次连续可微知存在 $r > 0$ 使得

$$|\varphi(y)| < \frac{1}{2}, \quad \forall |y - \hat{y}| \le \delta.$$

由微分中值定理,

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi'(\theta x+(1-\theta)y)|\cdot|x-y| \le \frac{1}{2}|x-y|, \quad \forall x,y\in[\hat{x}-r,\hat{x}+r].$$

此外,$\forall|x-\hat{x}|\le r$,

$$|\varphi(x)-\hat{x}| = |\varphi(x)-\varphi(\hat{x})| = |\varphi(\theta x+(1-\theta)\hat{x})|\cdot|x-\hat{x}| \le |x-\hat{x}| \le r.$$

因此 φ 是度量空间 $([\hat{x}-r,\hat{x}+r],|\cdot|)$ 上的压缩映射, $x_n\to\hat{x}$.

✍ **题目1.1.3.** 设 (H,ρ) 是度量空间, 映射 $T:H\to H$ 满足

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y) \quad (\forall x\ne y),$$

并已知 T 有不动点, 求证: 此不动点是唯一的.

解答. 设 $x\ne y$ 都是 T 的不动点, 则

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y),$$

矛盾.

✍ **题目1.1.4.** 设 T 是度量空间上的压缩映射, 求证:T 是连续的.

解答. 若 $x_n\to x_0$, 则 $\rho(Tx_n,Tx_0)\le\alpha\rho(x_n,x_0)\to 0$.

✍ **题目1.1.5.** 设 T 是压缩映射, 求证: T^n 也是压缩映射, 并且说明逆定理不一定成立.

解答. 若存在 $\alpha\in[0,1]$ 使得对任意的 x,y 都有 $\rho(Tx,Ty)\le\alpha\rho(x,y)$, 则 $\rho(T^nx,T^ny)\le\alpha^n\rho(x,y)$, 因此 T^n 也是压缩映射.

反例: 在度量空间 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ 中 $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 不是压缩映射, 但 $A^2=0$ 是.

✍ **题目1.1.6.** 设 M 是 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 中的有界闭集,映射 $T:M\to M$ 满足:$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)(\forall x,y\in M,x\ne y)$. 求证:$T$ 在 M 中存在唯一不动点.

解答. 显然 $\rho(x,Tx)$ 是 M 上的连续函数, 则由 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集知存在 $x_0\in M$

使得

$$\rho(x_0, Tx_0) = \inf_{x \in M} \rho(x, Tx).$$

则 x_0 一定是唯一不动点 (由题目 1.1.3 知不动点至多一个), 否则

$$\rho(x_0, Tx_0) \le \rho(Tx_0, T^2 x_0) < \rho(x_0, Tx_0).$$

✍ **题目1.1.7.** 对于积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) \mathrm{d}s = y(t),$$

其中 $y(t) \in C[0,1]$ 为一给定函数,λ 为常数,$|\lambda| < 1$, 求证: 存在唯一解 $x(t) \in C[0,1]$.

解答. 记 $Tx(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) \mathrm{d}s$. 在 $C[0,1]$ 上定义度量

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0,1]} e^{-t} |x_1(t) - x_2(t)|, \quad \forall x_1, x_2 \in C[0,1].$$

任取 $x_1 \ne x_2 \in C[0,1]$, 则

$$\rho(Tx_1, Tx_2) = \sup_{t \in [0,1]} |\lambda \int_0^1 e^{-s} \big(x_1(s) - x_2(s)\big) \mathrm{d}s| \le |\lambda| \rho(x_1, x_2),$$

因此 T 是 $C[0,1]$ 上的压缩映射, 有唯一不动点 $x \in C[0,1]$, 也就是积分方程的唯一解.

B.1.2 完备化

✍ **题目1.2.1.** 令 S 为一切实 (或复) 数列

$$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)$$

组成的集合, 在 S 中定义距离为

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots), y = (\eta_1, \cdots)$. 求证: S 为一个完备的度量空间.

解答. ρ 显然满足正定性和对称性, 三角不等式由

$$\frac{x+y}{1+x+y} \le \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}, \quad \forall x, y \ge 0$$

立即得到.

下面证明完备性: 设 $x^{(n)}$ 是 S 中的一个基本列, 则对任意的 k 都有

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|} \le \lim_{m,n\to\infty} \rho(x^{(m)}, x^{(n)}) = 0,$$

因此不难得出对每个 $k, \{x_k^{(n)}\}$ 都是 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 中的基本列, 从而收敛于 x_k. 记 $x = (x_1, x_2, \cdots)$, 只需证明 $x^{(n)} \to x$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 m 使得 $\sum_1^m \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. 并且存在 N 使得当 $n > N$ 时都有

$$|x_k^{(n)} - x_k| \le \varepsilon, \quad 1 \le k < m.$$

从而

$$\begin{aligned} \rho(x^{(n)}, x) &= \sum_{k<m} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)} - x_k|} + \sum_{k\ge m} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)} - x_k|} \\ &\le \sum_{k<m} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{2^k} + \sum_{k\ge m} \frac{1}{2^k} \le 2\varepsilon, \end{aligned}$$

因此 $x^{(n)} \to x$.

✍ **题目1.2.2.** 在一个度量空间 (X, ρ) 上, 求证: 基本列是收敛列, 当且仅当存在一串收敛子列.

解答. 只需证充分性. 设 $\{x_n\}$ 是基本列, 且有收敛于 x 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 则

$$\rho(x_k, x) \le \rho(x_{n_k}, x_k) + \rho(x_{n_k}, x) \to 0, \quad k \to \infty,$$

x_n 也收敛到 x.

✍ **题目1.2.3.** 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体, 在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in F, y=\{\eta_k\}\in F$, 求证: (F,ρ) 不完备, 并指出它的完备化空间.

解答. 反例: 令 $x^{(k)}=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k},0,0,\cdots\}$, 则 $x^{(k)}\to\{\frac{1}{n}\}_1^{\infty}\notin F$.

F 的完备化空间是所有收敛于 0 的实数列全体 M. 设 (F_1,ρ_1) 为 (F,ρ) 中的基本列等价类组成的完备化空间, 下面证明 (F_1,ρ_1) 与 (M,ρ) 等距同构. 构造映射 $\sigma: M\to F_1$. 设 $\{x_n\}\in M$, 记 $x^{(k)}=\{x_1,\cdots,x_k,0,\cdots\}$, 则

$$\rho(x^{(k)},x^{(k+p)})=\sup_{k+1\leq n\leq k+p}|x_n|\to 0,\quad k\to\infty,\forall p,$$

因此 $x^{(k)}$ 为 F 中的基本列. 令 $\sigma(\{x_n\})=\{x^{(k)}\}\in M$, 则

$$\begin{aligned}&\rho_1(\sigma(\{x_n\}),\sigma(\{y_n\}))=\rho_1(\{x^{(k)}\},\{y^{(k)}\})=\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},y^{(k)})\\&=\lim_{k\to\infty}\sup_{1\leq n\leq k}|x_n-y_n|=\sup_{n\geq 1}|x_n-y_n|=\rho(\{x_n\},\{y_n\}),\quad \forall\{x_n\},\{y_n\}\in M,\end{aligned}$$

并且显然 σ 是满射, 因此 σ 是一个等距同构映射, M 和 F 等距同构.

✍ **题目1.2.4.** 求证: $[0,1]$ 上的多项式全体按距离

$$\rho(p,q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|\mathrm{d}x,\quad p,q\in P[0,1]$$

是不完备的, 并指出它的完备化空间.

解答. 由 Weierstrass 逼近定理, 任取 $f\in C[0,1]$, 存在 $p_n\in P[0,1]$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 f, 从而按 ρ 收敛到 f, 从而 $(P[0,1],\rho)$ 不完备.

$P[0,1]$ 的完备化空间为 $L^1[0,1]$.

首先证明 $L^1[0,1]$ 是完备的. 设 $\{f_n\}$ 为 $L^1[0,1]$ 中的基本列, 则由 Chebyshev 不等式知 $\{f_n\}$ 依测度 Cauchy, 从而在紧集 $[0,1]$ 上 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到 f. 由于 f_n 为

基本列, 存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\int_0^1 |f_n - f_N| \le 1 \Longrightarrow \int_0^1 |f_n| \le \int_0^1 |f_n - f_N| + \int_0^1 |f_N| \le 1 + \int_0^1 |f_N|, \forall n > N.$$

故根据 Fatou 引理

$$\int_0^1 |f| \le \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n| < \infty \Longrightarrow f \in L^1[0,1].$$

从而从某项开始 $|f_n| \le 2|f|$ 且 $2|f| \in L^1[0,1]$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\rho(f, f_n) = \int_0^1 |f - f_n| \to 0 \Longrightarrow f_n \to f \in L^1[0,1],$$

因此 $L^1[0,1]$ 是完备的.

下面证明 $P[0,1]$ 在 $L^1[0,1]$ 中稠密. 事实上由于 $P[0,1]$ 在 $C[0,1]$ 中稠密, 只需证明 $C[0,1]$ 在 $L^1[0,1]$ 上稠密. 设 $f \in L^1[0,1]$. 则必有 $\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \ge 0 : m(\{|f| > \alpha\}) = 0\} < \infty$. 由 Lusin 定理, 存在 $g \in C[0,1]$ 和闭集 $F \subset [0,1]$ 满足 $m([0,1] \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$, 使得 $g|_F = f|_F$ 并且 $g(x) \le f(x), \forall x \in [0,1]$. 故

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f - g| = \int_{[0,1]\setminus F} |f - g| \le \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} \cdot 2\|f\|_\infty = \varepsilon,$$

从而 $C[0,1]$ 在 $L^1[0,1]$ 中稠密.

✍ **题目1.2.5.** 在完备度量空间 (X, ρ) 中给定点列 $\{x_n\}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在基本列 $\{y_n\}$, 使得

$$\rho(x_n, y_n) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛.

解答. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在基本列 $\{y_n\}$ 使得 $\rho(x_n, y_n) < \varepsilon, \forall n$. 从而

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n) + \rho(y_n, x_n) \le 2\varepsilon + \rho(y_m, y_n),$$

在上式中令 $m, n \to \infty$, 再由 ε 的任意性知 x_n 是基本列, 从而收敛.

B.1.3 列紧集

✍ **题目1.3.1.** 在完备的度量空间中求证: 子集 A 列紧的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 A 的列紧的 ε 网.

解答. 充分性显然, 下面证明必要性: 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的点集. 在 A 的列紧的 1 网中存在点列 $\{y_n\}$ 使得 $\rho(x_n,y_n)<1,\forall n$, 根据列紧性可知有子列 $\{y_n^{(1)}\}$ 收敛于 $y^{(1)}$, 因此从某项开始 (不妨设是第一项) 都有 $\rho(y_n^{(1)},y^{(1)})\le 1$. 从而

$$\rho(x_n^{(1)},y^{(1)})\le\rho(x_n^{(1)},y_n^{(1)})+\rho(y_n^{(1)},y^{(1)})\le 1+1=2,\forall n.$$

如此递归可以得到

$$\rho(x_n^{(k)},y^{(k)})\le\frac{2}{k},\forall k.$$

从而

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\le\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y^{(n)})+\rho(y^{(n)},x_n^{(n)})\le\frac{4}{n}\to 0,$$

$\{x_n^{(n)}\}$ 是基本列, 根据完备性知也是收敛列.

✍ **题目1.3.2.** 在度量空间中求证: 紧集上的连续函数必是有界的, 并且达到它的上下确界.

解答. 设 (X,ρ) 是度量空间,M 是 X 的紧子集, $f:M\to\mathbb{R}$ 连续. 任取 $f(M)$ 中的点列 $\{f(x_n)\}$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 M 中的点 x, 从而根据函数的连续性, $\{f_{n_k}\}$ 收敛到 $u(M)$ 中的点 $f(x)$, 故 $f(M)$ 也是紧的, 因此是有界闭集. 记

$$m=\inf_{x\in M}f(x),$$

由于 $f(M)$ 有界, 因此 $m\in\mathbb{R}$, 存在 M 中的点列 $\{y_n\}$ 使得 $f(y_n)\to m$, 从而存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛于 M 中的点 y, 且 $f(y)=\lim_k f(y_{n_k})=m$. 令 $g=-f$, 则 g 的下确界也能取到, 也就是 f 上确界能够达到.

✍ **题目1.3.3.** 在度量空间中求证: 完全有界的集合是有界的, 并通过 l^2 的子集 $E=\{e_k\}_1^\infty$,

其中

$$e_k = \{\underbrace{0, 0, \cdots, 0, 1}_{k}, 0, \cdots\},$$

来说明一个集合可以是有界但不完全有界的.

解答. 设 (X, ρ) 为度量空间, A 是 X 的一个完全有界子集, 则存在点 $x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 1) \implies A \subset B(x_1, R+1), R = \max_{2 \le k \le n} \rho(x_k, x_1),$$

故 A 有界.

在 l^2 中显然有 $\rho(e_k, 0) = 1, \forall k$, 因此 E 是有界的. 但是 $\rho(e_m, e_n) = \sqrt{2}, \forall m \neq n$, 因此不可能存在有穷的 $\frac{1}{2}$ 网, E 不是完全有界的.

✍ **题目1.3.4.** 设 (X, ρ) 是度量空间, F_1, F_2 是它的两个紧子集, 求证: 存在 $x_i \in F_i (i = 1, 2)$ 使得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$, 其中

$$\rho(F_1, F_2) \xlongequal{\Delta} \inf\{\rho(x, y) \mid x \in F_1, y \in F_2\}.$$

解答. 任取 $x \in F_1, y \in F_2$, $\rho(F_1, F_2) \le \rho(x, y) < \infty$, 因此该定义有意义. 存在 $\{u_n\} \subset F_1, \{v_n\} \subset F_2$, 使得 $\rho(u_n, \rho v_n) - \rho(F_1, F_2) \le \frac{1}{n}, \forall n$. 根据 F_1, F_2 的紧性, 存在子列 $\{u_{n_k}\}$ 收敛于 $x_1 \in F_1$, 存在子列的子列 $\{v_{n_{k_j}}\}$ 收敛于 $x_2 \in F_2$, 故

$$\rho(x_1, x_2) - \rho(F_1, F_2) \le \rho(x_1, u_{n_{k_j}}) + \rho(u_{n_{k_j}}), v_{n_{k_j}}) + \rho(v_{n_{k_j}}, x_2) \to 0 (j \to \infty),$$

因此 $\rho(x_1, x_2) = \rho(F_1, F_2)$.

✍ **题目1.3.5.** 设 M 是 $C[a, b]$ 中的有界集, 求证: 集合

$$E = \left\{ F(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d}t : f \in M \right\}$$

是列紧集.

解答. 设 $|f(t)| \le M_1, \forall f \in M, t \in [a,b]$, 则

$$|F(x)| = |\int_a^x f(t)\mathrm{d}t| \le (b-a)M_1, \forall F \in E, x \in [a,b],$$

从而 E 是一致有界的. 此外,

$$|F(x)-F(y)| \le |\int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t| \le M_1|x-y|,$$

因此 E 还是等度连续的, 根据 Arzeta-Ascoli 定理, E 是列紧集.

✍ **题目1.3.6.** 设 $E = \{\sin nt\}_1^\infty$, 求证 E 在 $C[0,\pi]$ 中不是列紧的.

解答. 考虑 E 的点列 $\{\sin 10^n t\}_1^\infty$, 其中任意两点间的距离

$$\begin{aligned}\rho(\sin 10^{n+p}t, \sin 10^n t) &= \sup_{t\in[0,\pi]} |\sin 10^{n+p}t, \sin 10^n t| \\ &= 2\sup_{t\in[0,\pi]} |\cos\frac{10^{n+p}+10^n}{2}t| \cdot |\sin\frac{10^{n+p}-10^n}{2}t| \\ &\ge \sqrt{2}|\cos\frac{1+10^{-p}}{1-10^{-p}}\cdot\frac{\pi}{4}| \ge \frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此不存在收敛子列, E 不是列紧的.

✍ **题目1.3.7.** 求证: S 空间的子集 A 列紧的充要条件是: $\forall n$, 存在 $C_n > 0$ 使得 $|x_n| \le C_n, \forall x \in A$.

解答. 必要性: 反设存在 $\{x^{(k)}\} \subset A$ 使得 $|x_n^{(k)}| \ge k, \forall k$. $\{x^{(k)}\}$ 的子列 $\{x^{(k_j)}\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n^{(k_j)}\}$ 收敛于 x_n, 但 $\{x_n^{(k_j)}\}$ 是无界的, 矛盾.

充分性: 对于 A 中的点列 $\{x^{(k)}\}$, 由于 $\{x_1^{(k)}\}$ 是有界的, 因此有收敛于 x_1 的子列 $\{x_1^{(k)(1)}\}$, 以此递归可知有收敛于 x_n 的子列 $\{x_n^{(k)(n)}\}$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 m 使得 $\sum\limits_{n>m} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 存在 N_n 使得当 $k \ge N_n$ 时有

$$|x_n^{(k)(n)} - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N = \max\limits_{1\leq n\leq m} N_n$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}\rho(x, x^{(n)(n)}) &\leq \sum_{n\leq m} 2^{-n}\frac{|x_n^{(n)(n)} - x_n|}{1+|x_n^{(n)(n)} - x_n|} + \sum_{n>m} 2^{-n}\\ &\leq \sum_{n\leq m} 2^{-n}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\{x^{(n)(n)}\}$ 收敛于 x.

✍ **题目1.3.8.** 设 (X,ρ) 是度量空间, M 是 X 中的列紧集, 映射 $f: X\to M$ 满足

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2.$$

求证: f 在 X 中存在唯一的不动点.

解答. 注意到

$$|\rho(x, f(x)) - \rho(y, f(y))| \leq \rho(x, y) + \rho(f(x), f(y)) \leq 2\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X, x \neq y,$$

因此 $\rho(x, f(x))$ 为连续函数, 记 $d = \inf\limits_{x\in M} \rho(x, f(x)) < \infty$, 存在 $x_0 \in X$ 使得 $d = \rho(x_0, f(x_0))$. x_0 必然是 f 的不动点, 否则若 $f(x_0) \neq x_0$, 则

$$d \leq \rho(f(x_0), f^2(x_0)) < \rho(x_0, f(x_0)) = d,$$

矛盾. 又设 y 是 f 在 X 中不同于 x_0 的不动点, 则

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) < f(x, y),$$

矛盾.

✍ **题目1.3.9.** 设 (M,ρ) 是一个紧度量空间, 又 $E \subset C(M), E$ 中的函数一致有界并满足下列 Holder 条件:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq C\rho(t_1, t_2)^{\alpha}, \quad \forall x \in E, \forall t_1, t_2 \in M,$$

其中 $0 < \alpha \leq 1, C > 0$. 求证: E 在 $C(M)$ 中是列紧集.

解答. 只需证 E 等度连续. 任取 $\varepsilon > 0$, 当 $\rho(t_1, t_2) < \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 且 $t_1, t_2 \in M$ 时有

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le C\rho(t_1, t_2)^{\alpha} < \varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

因此 E 等度连续.

B.1.4 赋范线性空间

✍ **题目1.4.1.** 在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 对每一点 $z = (x, y)$, 令

$$\|z\|_1 = |x| + |y|; \qquad \|z\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\|z\|_3 = \max(|x|, |y|); \quad \|z\|_4 = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的范数.

(2) 画出 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i)(i = 1, 2, 3, 4)$ 各空间中的单位球面图形.

(3) 在 $\mathbb{R}^2$ 中取定三点 $O = (0, 0), A = (1, 0), B = (0, 1)$, 试在上述四种不同范数下求出 ΔOAB 三边的长度.

解答. (1) 正定性和齐次性均显然满足, 只需验证三角不等式, 由 Minkowski 不等式可知,

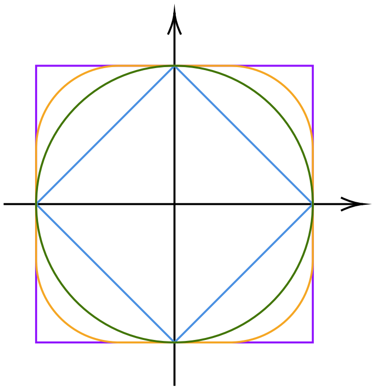
$$(|x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \le (|x_1|^p + |y_1|^p)^{\frac{1}{p}} + (|x_2|^p + |y_2|^p)^{\frac{1}{p}},$$

因此 $\|\cdot\|_i (i = 1, 2, 4)$ 满足三角不等式. 对 $\|\cdot\|_3$, 有

$$\begin{aligned}\|z_1 + z_2\|_3 &= \max(|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)\\ &\le \max(|x_1|, |y_1|) + \max(|x_2|, |y_2|) = \|z_1\|_3 + \|z_2\|_3.\end{aligned}$$

因此 $\|\cdot\|_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 均为范数.

(2) 四个范数的单位球面如下图:



(3)

$$\|OA\|_1 = 1, \quad \|OB\|_1 = 1, \quad \|AB\|_1 = 2,$$
$$\|OA\|_2 = 1, \quad \|OB\|_2 = 1, \quad \|AB\|_2 = \sqrt{2},$$
$$\|OA\|_3 = 1, \quad \|OB\|_3 = 1, \quad \|AB\|_3 = 1,$$
$$\|OA\|_4 = 1, \quad \|OB\|_4 = 1, \quad \|AB\|_4 = \sqrt[4]{2}.$$

✍ **题目1.4.2.** 令 $\|x\| = \sup\limits_{0<t\leq 1} |x(t)|, \forall x \in C(0,1]$. 求证:

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 上的范数;

(2) l^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间等距同构.

解答.

(1) 直接根据定义验证即可.

(2) 构造映射

$$\sigma : l^\infty \to C(0,1], \{x_n\} \mapsto x,$$

其中 x 满足 $x(\frac{1}{n}) = x_n, \forall n$, 并且 $\|x\| = \|\{x_n\}\|_\infty$(根据 Tietz 延拓定理, 这样的 x 必然存在).

✍ **题目1.4.3.** 在 $C^1[a,b]$ 中令

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_a^b (|f|^2 + |f'|^2)\mathrm{d}x}, \quad \forall f \in C^1[a,b],$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数.

(2) 问 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 是否完备?

解答.

(1) 齐次性和正定性显然成立, 对于三角不等式, 有

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1^2 &= \int_a^b (|f+g|^2+|f'+g'|^2)\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b (|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x + 2\int_a^b (|fg|+|f'g'|)\mathrm{d}x + \int_a^b (|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b (|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x + 2\sqrt{\int_a^b (|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b (|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x} \\
&\quad + \int_a^b (|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x \\
&= \left(\sqrt{\int_a^b (|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b (|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x}\right)^2 = (\|f\|_1+\|g\|_1)^2.
\end{aligned}$$

(2) 不完备, 若令

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}, \quad f(x) = |x|, \quad -1 \le x \le 1.$$

则

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= \frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x^2\right)} \le \frac{1}{n}, \\
|f_n'(x)-f'(x)| &= \frac{1}{n^2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x^2\right)} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

故

$$\|f-f_n\|_1^2 \le \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2}+\frac{2\arctan n}{n} \le \frac{2}{n^2}+\frac{\pi}{n} \to 0,$$

因此 $f_n \to f$, 但 $f \notin C^1[-1,1]$.

✍ **题目1.4.4.** 在 $C[0,1]$ 中, 对每一个 $f \in C[0,1]$, 令

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x}, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (1+x)|f(x)|^2\mathrm{d}x},$$

求证: $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数.

解答. 由 $1\le 1+x\le 2,\forall x\in[0,1]$ 可得 $\|f\|_1\le\|f\|_2\le\sqrt{2}\|f\|_1$.

✍ **题目1.4.5.** 设 $BC[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体, 对每个 $f\in BC[0,\infty)$ 及 $a>0$, 定义

$$\|f\|_1=\sqrt{\int_0^\infty e^{-ax}|f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_a$ 是 $BC[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 若 $a,b>0, a\ne 0$, 求证 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$ 作为 $BC[0,\infty)$ 上的范数是不等价的.

解答.

(1) 齐次性和正定性显然易见, 三角不等式由 Cauchy 不等式推得.

(2) 不妨设 $a<b$, 令 $f_n(x)=e^{ax/2}\chi_{[0,n]}(x)+e^{an/2}(n+1-x)\chi_{(n,n+1)}(x)\in BC[0,\infty)$. 并且

$$\frac{\|f_n\|_a^2}{\|f_n\|_b^2}\ge(b-a)n,$$

因此 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 不等价.

✍ **题目1.4.6.** 设 X_1,X_2 是两个 B^* 空间, 在 $X=X_1\times X_2$ 上赋以范数

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2),\quad\forall x=(x_1,x_2),x_i\in X_i,\|\cdot\|_i\text{ 是 }X_i\text{ 上的范数 }(i=1,2).$$

求证: 如果 X_1,X_2 是 B 空间, 那么 X 也是 B 空间.

解答. 设 $\{x^{(n)}\}$ 为 X 上的 Cauchy 列, 则

$$\|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\|_i\le\|x^{(n)}-x^{(m)}\|\to 0,\quad n,m\to\infty(i=1,2),$$

因此 $\{x_i^{(n)}\}$ 为 X_i 中的 Cauchy 列, 收敛于 $x_i\in X_i$. 令 $x=(x_1,x_2)$, 则

$$\|x^{(n)}-x\|\le\|x_1^{(n)}-x_1\|_1+\|x_2^{(n)}-x_2\|_2,$$

在上式中令 $n\to\infty$ 即可.

✍ **题目1.4.7.** 设 X 是 B^* 空间. 求证:X 是 B 空间, 必须且仅需对 $\forall\{x_n\}_1^\infty\subset X$, $\sum\limits_{n=1}^\infty\|x_n\|<\infty$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

解答. 必要性: 设 $\{x_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, 则

$$\|\sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \to 0, \quad n \to \infty, \forall p,$$

根据完备性有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

充分性: 设 $\{x_n\}$ 是一个基本列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k.$$

由

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

可知, 存在 $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$, 也即 $x = y + x_{n_1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, 因此 $\{x_{n_k}\}$ 收敛, 根据基本列的性质, $\{x_n\}$ 也收敛.

✍ **题目1.4.8.** 记 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体为 $\mathbb{P}_n$. 求证: $\forall f(x) \in C[a,b]$, $\exists P_0(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$\max_{a\le x\le b} |f(x) - P_0(x)| = \min_{P\in\mathbb{P}_n} \max_{a\le x\le b} |f(x) - P(x)|.$$

也就是说, 如果用所有次数不超过 n 的多项式对 $f(x)$ 一致逼近, 那么 $P_0(x)$ 是最佳的.

解答. 由于 $\mathbb{P}_n = \mathrm{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$, 因此 $\mathbb{P}_n$ 是有限维线性子空间, 最佳逼近元必存在.

✍ **题目1.4.9.** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 对 $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 定义范数

$$\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|),$$

并设 $e_1=(1,0), x_0=(0,1)$. 求 $a\in\mathbb{R}$ 适合

$$\|x_0-ae_1\|=\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x_0-\lambda e_1\|,$$

并问这样的 a 是否唯一? 请对结果做出几何解释.

解答. 注意到

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x_0-\lambda e_1\|=\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\max(1,|\lambda|)=1,$$

因此当 $|a|\le 1$ 时是最小逼近元, 不唯一. 从 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ 中单位球面的图像 (见题目1.5.5的 $\|\cdot\|_3$) 不难看出, 正方形两个相邻顶点的中点仍在单位球面上, 因此该赋范空间不是严格凸的, 从而最佳逼近元不一定唯一.

✍ **题目1.4.10**. 求证: 范数的严格凸性等价于下列条件:

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|(\forall x\neq 0, y\neq 0)\implies x=cy\ \ (c>0).$$

解答. 必要性: 设 $\left\|x+y\right\|=\|x\|+\left\|y\right\|$, 则必有 $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$, 否则,

$$1=\frac{\left\|x+y\right\|}{\|x\|+\left\|y\right\|}=\left\|\frac{\|x\|}{\|x\|+\left\|y\right\|}\cdot\frac{x}{\|x\|}+\frac{\left\|y\right\|}{\|x\|+\left\|y\right\|}\cdot\frac{y}{\left\|y\right\|}\right\|<1,$$

矛盾.

充分性: 设 $\|x\|=\left\|y\right\|=1$ 且 $x\neq y$, 若存在 $0<\alpha<1$ 使得 $\left\|\alpha x+(1-\alpha)y\right\|=1$(该范数不可能大于 1), 则 $\left\|\alpha x+(1-\alpha)y\right\|=\|\alpha x\|+\left\|(1-\alpha)y\right\|\implies \alpha x=c(1-\alpha)y\ \ (c>0)\implies x=y$, 矛盾.

✍ **题目1.4.11**. 设 X 是赋范线性空间, 函数 $\varphi: X\to\mathbb{R}$ 称为凸的, 如果不等式

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)\quad(\forall 0\le\lambda\le 1)$$

成立. 求证: 凸函数的局部极小值必然是全空间极小值.

解答. 设 $x_0\in X$ 和 $r>0$ 满足 $\varphi(x)\ge\varphi(x_0), \forall\|x-x_0\|\le r$. 若 x_0 不是全局极小点, 也即

存在 $x_1 \in X$ 使得 $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$, 则

$$\begin{aligned}
&\left\| x_0 - \left(\frac{r}{\|x_1 - x_0\|} x_1 + \left(1 - \frac{r}{\|x_1 - x_0\|}\right) x_0 \right) \right\| \le r \\
\Longrightarrow\ & \varphi(x_0) \le \varphi\left(\frac{r}{\|x_1 - x_0\|} x_1 + \left(1 - \frac{r}{\|x_1 - x_0\|}\right) x_0 \right) \\
&\le \frac{r}{\|x_1 - x_0\|} \varphi(x_1) + \left(1 - \frac{r}{\|x_1 - x_0\|}\right) \varphi(x_0) < \varphi(x_0),
\end{aligned}$$

矛盾.

✍ **题目1.4.12.** 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一赋范线性空间, M 是 X 的有限维子空间, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 M 的一组基, 给定 $g \in X$, 引进函数 $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, 对 $\forall c = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ 规定

$$F(c) = F(c_1, \cdots, c_n) = \|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i - g\|.$$

(1) 求证: F 是一个凸函数.

(2) 若 $F(c)$ 的最小值点是 $c = (c_1, \cdots, c_n)$, 求证:

$$f \triangleq \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

给出 g 在 M 中的最佳逼近元.

解答.

(1) 任取 $a, b \in \mathbb{K}^n, \lambda \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned}
F(\lambda a_i + (1-\lambda) b_i) &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda a + (1-\lambda) b\big) e_i - g \right\| \\
&= \left\| \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i - g \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i - g \right) \right\| \\
&\le \lambda F(a) + (1-\lambda) b.
\end{aligned}$$

✍ **题目1.4.13.** 设 X 是 B^* 空间, X_0 是 X 的线性子空间, 假定 $\exists c \in (0,1)$, 使得

$$\inf_{x\in X_0} \|y-x\| \le c\|y\| \quad (\forall y \in X).$$

求证: X_0 在 X 中稠密.

解答. 任取 $x \in X$, 存在 $x_1 \in X_0$ 使得 $\|x-x_1\| \le \left(\frac{c+1}{2}\right)\|x\|$, 如此递归, 存在 $x_1, \cdots, x_n$, 使得

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \le \left(\frac{c+1}{2}\right)^n \|x\| \to 0,$$

因此 $\{x_1+\cdots+x_n\} \subset X_0$ 并收敛于 x, 从而 X_0 在 X 中稠密.

✍ **题目1.4.14.** 设 C_0 表示以 0 为极限的实数全体, 并在 C_0 中赋以范数

$$\|x\| = \max_{n\ge1}|\xi_n| \quad (\forall x = (x_1,\cdots,x_n) \in C_0).$$

又设 $M \triangleq \left\{x = \{\xi_n\}_1^\infty \in C_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} = 0\right\}$.

(1) 求证: M 是 C_0 的闭线性子空间.

(2) 设 $x_0 = (2,0,0,\cdots)$, 求证:

$$\inf_{z\in M} \|x_0 - z\| = 1,$$

但 $\forall y \in M$ 有 $\|x_0 - y\| > 1$.

解答.

(1) 设 $\{x^{(k)}\} \subset M$ 且 $x^{(k)} \to x \in C_0$. 则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}}{2^n}\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|x_n^{(k)}-x_n\right|}{2^n}\right| \le \left\|x-x^{(k)}\right\| \to 0,$$

令 $k \to 0$, 得 $x \in M$, 从而 M 是闭的. M 为线性子空间根据定义易得.

(2) 若存在 $y \in M$ 使得 $\left\|x_0 - y\right\| \le 1$, 则 $|y_1| \ge 1, |y_n| \le 1, \forall n \ge 2$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 因此 $|y_n|$ 必然从某项开始小于 $\frac{1}{2}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} \le \left|\frac{y_1}{2}\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}\right| < \frac{1}{2},$$

矛盾, 因此 $\|x_0-y\|>1,\forall y\in M$. 下面证明 $\inf\limits_{z\in M}\|x_0-z\|=1$. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得 $2^{1-N}<\varepsilon$, 令 y 满足 $y_1=1-2^{1-N}, y_n=-1(2\le n\le N), y_n=0(n>N)$, 此时显然 $y\in C_0, \|x_0-y\|=2^{1-N}<\varepsilon$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}=\frac{1-2^{1-N}}{2}-\sum_{n=2}^{N}2^{-n}=0\Longrightarrow y\in M.$$

✍ **题目1.4.15.** 设 X 是 B^* 空间, M 是 X 的有限维真子空间. 求证: 存在 $y\in X,\|y\|=1$, 使得

$$\|y-x\|\ge 1\quad(\forall x\in M).$$

解答. 取 $y_0\in M^c$, 存在 $x_0\in M$ 使得 $\|x_0-y_0\|=\rho(y_0,M)>0$, 令 $y=\frac{y_0-x_0}{\|x_0-y_0\|}$, 则

$$\|y-x\|=\frac{\|y_0-(x_0+\|x_0-y_0\|x)\|}{\|x_0-y_0\|}\ge\frac{\|x_0-y_0\|}{\|x_0-y_0\|}=1,\forall x\in M.$$

✍ **题目1.4.16.** 若 f 是定义在区间 $[0,1]$ 上的复值函数, 定义

$$\omega_\delta(f)=\sup\{|f(x)-f(y)|:\forall x,y\in[0,1],|x-y|\le\delta\}.$$

如果 $0<\alpha\le 1$ 对应的 Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}\alpha$, 由满足

$$\|f\|\xlongequal{\Delta}|f(0)|+\sup_{\delta>0}\{\delta^{-\alpha}\omega_\delta(f)\}<\infty$$

的一切 f 组成, 并以 $\|f\|$ 为范数. 又设

$$\mathrm{lip}f\xlongequal{\Delta}\{f\in\mathrm{Lip}\alpha:\lim_{\delta\to 0}\delta^{-\alpha}\omega_\delta(f)=0\}.$$

求证: $\mathrm{Lip}\alpha$ 是 B 空间, 而且 $\mathrm{lip}\alpha$ 是 $\mathrm{Lip}\alpha$ 的闭子空间.

解答. 由题 1.4.7, 只需对 $\{f_n\}\subset\mathrm{Lip}\alpha,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|<\infty$ 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ 收敛. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\le\sum_{n=1}^{\infty}(|f_n(0)|+|f_n(x)-f_n(0)|)$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big|f_n(0)\big| + (\|f_n\| - \big|f_n(0)\big|)|x|\Big)$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big|f_n(0)\big| + (\|f_n\| - \big|f_n(0)\big|)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\| < \infty,$$

故存在 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. 此时

$$\left\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\right\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\right\| \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\|f_n\| \to 0, \quad N \to \infty,$$

因此 Lipα 完备.

下面证 lipα 是闭的. 设 $\{g_n\} \subset \mathrm{lip}\alpha, g_n \to g \in \mathrm{Lip}\alpha$. 则

$$\lim_{\delta\to 0}\delta^{-\alpha}\omega_\delta(f) \le \lim_{\delta\to 0}\big(\delta^{-\alpha}\omega_\delta(f-f_n) + \delta^{-\alpha}\omega_\delta(f_n)\big) \le \|f-f_n\|,$$

在上式中令 $n\to\infty$ 即可.

✍ **题目1.4.17.** 设有商空间 X/X_0.

(1) 设 $[x] \in X/X_0$, 求证: 对 $\forall x \in [x]$, 有

$$\inf_{z\in X_0}\|x-z\| = \|[x]\|_0.$$

(2) 定义映射 $\varphi: X \to X/X_0$ 为

$$\varphi(x) = [x] \xlongequal{\Delta} x + X_0 \quad (\forall x \in X),$$

求证: φ 是连续线性映射.

(3) $\forall [x] \in X/X_0$, 求证: 存在 $x \in X$, 使得

$$\varphi(x) = [x], \quad 且 \quad \|x\| \le 2\|[x]\|_0.$$

(4) 设 $X = C[0,1], X_0 = \{f \in X : f(0) = 0\}$, 求证:

$$X/X_0 \cong \mathbb{K},$$

其中记号"≅" 表示等距同构.

解答.

(1) $\|[x]\|_0 = \inf\limits_{y\in[x]} \|y\| = \inf\limits_{w\in X_0} \|x+w\| = \inf\limits_{z\in X_0} \|x-z\|$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi(x_n)\|_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \|[x_n]\|_0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \|x_0\| = 0$.

(3) 由定义, 存在 $y \in [x]$, 使得 $\|y\| \le 2\|[x]\|_0 = 2\|[y]\|_0$, 并且 $\varphi(y) = [y]$.

(4) 构造映射 $\sigma : X/X_0 \to \mathbb{K}, f + X_0 \mapsto f(0)$, 容易验证 σ 是一个双射, 并且

$$\|[f]\|_0 = \inf_{g(0)=f(0)} \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = |f(0)|,$$

因此 σ 是一个等距同构.

B.1.5 凸集与不动点

✍ **题目1.5.1.** 设 X 是 B^* 空间, E 是以 0 为内点的真凸子集, P 是由 E 产生的 Minkowski 泛函, 求证:

(1) $x \in E^\circ \Longleftrightarrow P(x) < 1$;

(2) $\overline{E^\circ} = \overline{E}$.

解答. (1) $x \in E^\circ \Longrightarrow$ 存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset E \Longrightarrow \left(1 + \frac{r}{2\|x\|}\right)x \in B(x,r) \subset E \Longrightarrow P(x) \le \frac{1}{1+\frac{r}{2\|x\|}} < 1$.

由 $0 \in E^\circ$ 知存在 $r > 0$ 使得 $B(0,r) \subset E$. 则 $P(x) < 1 \Longrightarrow cx \in E (c = \frac{2}{P(x)+1} > 1) \Longrightarrow \forall \|x-y\| < \left(1 - \frac{1}{c}\right)r$ 有

$$y = \frac{1}{c} \cdot cx + \left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{x-y}{1-\frac{1}{c}},$$

而 $cx \in C, \frac{x-y}{1-\frac{1}{c}} \in B(0,r) \subset E$, 因此 $y \in E$, 从而 $B\left(x, \left(1-\frac{1}{c}\right)r\right) \subset E \Longrightarrow x \in E^\circ$.

(2) 只需证 $\overline{E} \subset \overline{E^\circ}$. $x \in \overline{E} \Longrightarrow \exists \{x_n\} \subset E, x_n \to x \Longrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n \to x, P\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n\right) =$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)P(x_n)\le 1-\frac{1}{n}<1 \implies \{y_n\}\subset E^\circ,\ y_n\to x\ \left(y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right) \implies x\in\overline{E^\circ}.$

✍ **题目1.5.2.** 求证: 在 B 空间中, 列紧集的凸包是列紧集.

解答. 设 E 为一列紧集, 则任取 $\varepsilon>0$, 存在 $x_1,\cdots,x_m\in X$ 构成 E 的 $\frac{1}{n}$ 网. 令

$$N=\left\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k : \sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1,\lambda_k\ge 0\right\},$$

则 N 显然是列紧的, 而完备空间中集合列紧当且仅当存在列紧的 ε 网, 因此 $\mathrm{co}(E)$ 列紧.

✍ **题目1.5.3.** 设 C 是 B^* 空间 X 中的一个紧凸集, 映射 $T:C\to C$ 连续, 求证: T 在 C 上有一个不动点.

解答. 由于 C 是紧集并且 T 连续, 因此 $T(C)$ 也是紧集, 故由 Schauder 不动点定理可得 T 在 C 上有不动点.

✍ **题目1.5.4.** 设 C 是 B 空间 X 中的一个有界闭凸集, 映射 $T_i:C\to X(i=1,2)$ 适合

(1) $\forall x,y\in C \implies T_1x+T_2y\in C$;

(2) T_1 是一个压缩映射, T_2 是一个紧映射.

求证: T_1+T_2 在 C 上至少有一个不动点.

解答. 首先证明 $I-T_1$(I 为恒等映射) 为从 C 到 C 的双射. 任取 $x\in C$, T_1+x 仍为压缩映射, 因此存在唯一的 $y\in C$ 使得 $T_1y+x=y$, 也即 $x=(I-T_1)y$, 故 $(I-T_1)(C)=C$, $I-T_1$ 为满射. 又设 $(I-T_1)(x)=(I-T_1)y \implies x-y=T_1(x)-T_1(y) \implies \|x-y\|=\|T_1(x)-T_1(y)\|\le\alpha\|x-y\|,\alpha\in(0,1) \implies x=y \implies T_1$ 为单射.

$(I-T_1)^{-1}$ 是连续的, 因为 $\forall x,y\in C$, 若记 $x'=(I-T_1)^{-1}(x),y'=(I-T_1)^{-1}(y)$, 有

$$\begin{aligned}\|x-y\|&=\|(I-T_1)(x')-(I-T_1)(y')\|\\&=\|(x'-y')-(T_1(x')-T_1(y')\|\ge\|x'-y'\|-\|T_1(x')-T_1(y')\|\\&\ge\|x'-y'\|-\alpha\|x'-y'\|=(1-\alpha)\|(I-T_1)^{-1}(x)-(I-T_1)^{-1}(y)\|.\end{aligned}$$

再由 T_2 紧知 $(I-T_1)^{-1}T_2$ 是紧映射, 因此在有界闭凸集 C 上必有不动点 x, 也即 $(I-T_1)^{-1}T_2(x)=x \implies (T_1+T_2)(x)=x$.

✍ **题目1.5.5.** 设 A 是 $n\times n$ 矩阵, 其元素 $a_{ij}>0(1\le i,j\le n)$, 求证: 存在 $\lambda>0$ 及各分量非负但不全为零的向量 $x\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$Ax=\lambda x.$$

解答. 设赋范空间为 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$. 记

$$C=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mathbb{R}^n: x_k\ge 0(1\le k\le n),\|x\|_1=1\right\},$$

则 C 为紧凸集. 由 Schauder 不动点定理, 连续映射 $x\mapsto\frac{Ax}{\|Ax\|_1}$ 在 C 上必有不动点 (由 $x\mapsto Ax$ 及 $x\mapsto\frac{x}{\|x\|_1}$ 在 C 上连续可得), 也即存在 $x\in C$ 使得 $Ax=\|Ax\|_1x$.

✍ **题目1.5.6.** 设 $K(x,y)$ 是 $[0,1]^2$ 上的正值连续函数, 定义映射

$$(Tu)(x)=\int_0^1 K(x,y)u(y)\mathrm{d}y,\quad\forall u\in C[0,1].$$

求证: 存在 $\lambda>0$ 及非负但不恒为零的连续函数 u, 满足

$$Tu=\lambda u.$$

解答. 设赋范空间为 $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty,\mathbb{R})$. 记 $M=\sup\limits_{0\le x,y\le 1}K(x,y)>0$, $m=\inf\limits_{0\le x,y\le 1}K(x,y)>0$. 再记

$$C=\{u\in C[0,1]:u\ge 0,\|u\|_1=1\},$$

则 C 为闭凸集, 考虑连续映射 $T_1u=\frac{Tu}{\|Tu\|_1}:C\to C$(由 $u\mapsto Tu$ 和 $u\mapsto\frac{u}{\|u\|_1}$ 在 C 上连续可得). 由

$$\|T_1u\|_\infty=\frac{\sup\limits_{x\in[0,1]}\int_0^1K(x,y)u(y)\mathrm{d}y}{\iint\limits_{[0,1]^2}K(x,y)u(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\le\frac{M}{m},\quad\forall u\in C$$

知 $T_1 u$ 一致有界. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\left|K(x_1, y) - K(x_2, y)\right| < \varepsilon, \quad \forall |x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2, y \in [0,1],$$

从而

$$\begin{aligned}\left|T_1 u(x) - T_1 u(x')\right| &\le \frac{\int_0^1 \left|K(x,y) - K(x',y)\right| u(y)\mathrm{d}y}{\iint\limits_{[0,1]^2} K(t,y)u(y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y} \\ &\le \frac{\varepsilon \int_0^1 u(y)\mathrm{d}y}{m\int_0^1 u(y)\mathrm{d}y} = \frac{\varepsilon}{m}, \quad \forall \left|x - x'\right| < \delta, x, x' \in [0,1],\end{aligned}$$

因此 $T_1(C)$ 等度连续. 由 Arzeta-Ascoli 定理, $T_1(C)$ 列紧, 再由 Schauder 不动点定理, T_1 在 C 上存在不动点 u, 也即 $Tu = \|Tu\|_1 u$.

B.1.6 内积空间

✍ **题目1.6.1.** 设 a 是复线性空间 X 上的共轭双线性函数, q 是由 a 诱导的二次型, 求证:

$$a(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)\big), \quad \forall x, y \in X.$$

解答.

$$\begin{aligned}&q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy) \\ =&a(x,x) + a(x,y) + a(y,x) - (x,x) + a(x,y) + a(y,x) - a(y,y) \\ &+ ia(x,x) + a(x,y) - a(y,x) + ia(y,y) - ia(x,x) + a(x,y) \\ &- a(y,x) + ia(y,y) \\ =&4a(x,y).\end{aligned}$$

✍ **题目1.6.2.** 求证: 在 $C[a,b]$ 中不可能引入一种内积 $(\cdot,\cdot)$, 使其满足

$$\sqrt{(f,f)} = \max_{a \le x \le b} \left|f(x)\right|, \quad \forall f \in C[a,b].$$

解答. 若 $C[a,b]$ 可以引入题设内积, 则范数 $\|\cdot\|$ 满足三角恒等式, 也即

$$\max_{a\le x\le b}\left|f+g\right|^2+\max_{a\le x\le b}\left|f-g\right|^2=2\left(\max_{a\le x\le b}\left|f\right|^2+\max_{a\le x\le b}\left|g\right|^2\right),$$

但显然 $f(x)=\frac{x-a}{b-a}, g(x)=1(\forall x\in[a,b])$ 不满足上式.

✍ **题目1.6.3.** 在 $L^2[0,T]$ 中, 求证: 函数

$$x\mapsto\left|\int_0^T e^{-(T-\tau)}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|,\quad \forall x\in L^2[0,T]$$

在单位球面上达到最大值, 并求出此最大值和达到最大值的元素 x.

解答. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 对任意 $\|x\|_2=1$, 有

$$\left|\int_0^T e^{-(T-\tau)}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|^2\le\left(\int_0^T e^{-2(T-\tau)}\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^T |x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2T}\right),$$

因此该函数在单位球面上的最大值为 $\sqrt{\frac{1-e^{-2T}}{2}}$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件, 达到最大值的元素为 $x(\tau)=\frac{e^{-(T-\tau)}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2T}}{2}}}, \tau\in[0,T]$.

✍ **题目1.6.4.** 设 M,N 是内积空间中的两个子集, 求证:

$$M\subset N\implies N^{\perp}\subset M^{\perp}.$$

解答. $x\perp N\implies x\perp M\implies x\perp M$.

✍ **题目1.6.5.** 设 M 是 Hilbert 空间 H 的子集, 求证

$$(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\mathrm{span}M}.$$

解答. 记 $E=\overline{\mathrm{span}M}$ 为闭线性子空间, 显然 $(M^{\perp})^{\perp}=(E^{\perp})^{\perp}$, 只需证 $(E^{\perp})^{\perp}=E$ 即可.

任取 $x\in E$, 则 $\forall y\in E^{\perp}$, $y\perp x\implies x\in E^{\perp}\implies E\subset(E^{\perp})^{\perp}$.

下面证明若 $x\in E^c$, 则 $x\not\in(E^{\perp})^{\perp}$. 由于 E 是闭子空间, 存在唯一正交分解 $x=$

$y+z, y\in M, z\in M^{\perp}$. 如果 $x\perp E^{\perp}$, 则

$$(x,z)=(x,x-y)=(x-y,x-y)+(y,x-y)=(x-y,x-y)=0,$$

从而 $x=y\in M$, 矛盾.

✍ **题目1.6.6.** 在 $L^2[-1,1]$ 中, 问偶函数集的正交补是什么? 证明你的结论.

解答. 偶函数的正交补是奇函数, 也即 f 是奇函数当且仅当 $f\perp g, \forall g$ 为 $L^2[-1,1]$ 上的偶函数 (此处的偶函数与奇函数均为几乎处处意义下).

必要性:

$$\begin{aligned}(f,g)&=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x+\int_0^1 f(-x)\overline{g(-x)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x+\int_0^1(-f(x))\overline{g(x)}\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

充分性: 令 $g(x)=\overline{f(x)+f(-x)}$ 为偶函数, 则

$$(f,g)=\|f(x)+f(-x)\|_2^2=0\implies f(x)+f(-x)=0\quad\text{a.e.}$$

✍ **题目1.6.7.** 在 $L^2[a,b]$ 中, 考察函数集 $S=\{e^{2\pi inx}\}$.

(1) 若 $|b-a|\le 1$, 求证: $S^{\perp}=\{0\}$;

(2) 若 $|b-a|>1$, 求证: $S^{\perp}\ne\{0\}$.

解答. (1) $|b-a|=1$ 由 Fourier 分析知识, 有 $S^{\perp}=\{0\}$. 若 $|b-a|<1$, 补充定义 $f(x)=0, x\in(b,a+1]$ 即可.

(2) 若 $a<b-2$, 在 $[a,b-2)$ 上定义 $f\equiv 0$, 在 $[b-2,b-1]$ 上定义 $f\equiv -1$; 若 $b-2\le a<b-1$, 在 $[a,b-1]$ 上定义 $f\equiv -1$; 在 $(b-1,b]$ 上定义

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_a^{b-1}e^{2\pi int}\mathrm{d}t\right)e^{2\pi inx},\quad x\in(b-1,b],$$

其中 $\left|\int_a^{b-1} e^{2\pi int}\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{\pi n}$, 并且 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi inx}$ 对 x 一致有界, 由数学分析知识知如上定义的 f 有意义, 显然有 $f\in S^{\perp}$ 且 $f\neq 0$.

✍ **题目1.6.8.** 设 H 表示闭单位圆上的解析函数全体, 内积定义为

$$(f,g)=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)\overline{g}(z)}{z}\mathrm{d}z,\quad \forall f,g\in H.$$

求证: $\left\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ 是一组正交规范集.

解答.

$$\left\|\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{|z|^n}{z}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z=1|}\frac{\mathrm{d}z}{z}=1,\quad \forall n\ge 0,$$
$$2\pi i\left(\frac{z^m}{\sqrt{2\pi}},\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right)=\int_{|z|=1}\frac{z^m\overline{z}^n}{z}\mathrm{d}z=\int_{|z|=1}z^{m-n-1}\mathrm{d}z=0,\quad \forall m>n.$$

✍ **题目1.6.9.** 设 $\{e_n\}_1^\infty,\{f_n\}_1^\infty$ 是 Hilbert 空间 H 中的两个正交规范集, 满足条件

$$\sum_{n=1}^\infty \|e_n-f_n\|^2<1.$$

求证: $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备.

解答. 设 $\{e_n\}$ 完备. 若 $0\neq x\perp f_n,\forall n\ge 1$, 则

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^\infty |(x,e_n)|^2=\sum_{n=1}^\infty \left|(x,e_n-f_n)\right|\le \sum_{n=1}^\infty \|x\|^2\cdot\left|e_n-f_n\right|^2<\|x\|^2,$$

矛盾, 因此 $\{f_n\}^{\perp}=\{0\}$, $\{f_n\}$ 也完备.

✍ **题目1.6.10.** 设 H 是 Hilbert 空间, H_0 是 H 的闭线性子空间, $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 分别是 H_0 和 $H_0^{\perp}$ 的正交规范基. 求证: $\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 是 H 的正交规范基.

解答. 设 $x\in H$, 由 $x-P(x)\in H_0^{\perp}$ 和 $P(x)\in H_0\subset (H^{\perp})^{\perp}$ 知 $(x-P(x),e_n)=(P(x),f_n)=0,\forall n\ge 1$, 从而

$$x=P(x)+\big(x-P(x)\big)=\sum_{n=1}^\infty\Big((P(x),e_n)e_n+(x-P(x),f_n)f_n\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big((x, e_n) e_n + (x, f_n) f_n \Big).$$

✍ **题目1.6.11.** 设 $H^2(D)$ 为开单位圆上所有 $\|\cdot\|_2$ 有限的解析函数构成的内积空间.

(1) 如果 $u \in H^2(D)$ 的 Taylor 展开式是 $u(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, 求证:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|^2}{1+k} < \infty.$$

(2) 设 $u, v \in H^2(D)$, 并且

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

求证:

$$(u, v) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \overline{b}_k}{k+1}.$$

(3) 设 $u \in H^2(D)$, 求证

$$|u(z)| \le \frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}, \quad \forall |z| < 1.$$

(4) 验证 $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间.

证明. (1) 记 $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n (n \ge 0)$ 为 $H^2(D)$ 的一组正交规范基. 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|^2}{1+k} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \big|(u, \varphi_k)\big|^2 = \frac{1}{\pi} \|u\|^2 < \infty.$$

(2)

$$\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b}_n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u, \varphi_n)(v, \varphi_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (u, \varphi_n) \varphi_n, \sum_{m=0}^{\infty} (v, \varphi_m) \varphi_m \right) = (u, v).$$

(3)

$$|u(z)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (u, \varphi_n) \varphi_n(z) \right|^2 \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big|(u, \varphi_n)\big|^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big|\varphi_n(z)\big|^2 \right)$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|(u,\varphi_n)\right|^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi}\left|z^n\right|\right)=\frac{\|u\|^2}{\pi(1-|z|)^2},\quad |z|<1.$$

(4) 若 $\{u_n\}$ 为 $H^2(D)$ 中的 Cauchy 列, 则由 (3), u_n 在 $|z|<1$ 上内壁收敛于函数 u, 故 $u\in H^2(D)$ 并且 $u_n\to u$. □

✍ **题目1.6.12.** 设 X 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 X 中的正交规范集, 求证

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right|\leq\|x\|\cdot\|y\|,\quad \forall x,y\in X.$$

解答.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|(y,e_n)\right|^2\right)\leq\|x\|\cdot\|y\|.$$

✍ **题目1.6.13.** 设 X 是一个内积空间, $\forall x_0\in X, r>0$, 令

$$C=\{x\in X:\|x-x_0\|\leq r\}.$$

(1) 求证: C 是 X 中的闭凸集.

(2) $\forall x\in X$, 令

$$y=\begin{cases}x_0+\frac{r(x-x_0)}{\|x-x_0\|}, & x\notin C,\\ x, & x\in C.\end{cases}$$

求证: y 是 x 在 C 中的最佳逼近元.

解答. (1) 直接验证即可.

(2) 若 $x\in C$, 显然成立. 若 $x\notin C$, 则

$$\begin{aligned}\|x-z\|&=\|(x-x_0)-(z-x_0)\|\geq\|x-x_0\|-\|z-x_0\|\\&\geq\|x-x_0\|-r=\|x-y\|,\quad\forall z\in C.\end{aligned}$$

✍ **题目1.6.14.** 求 $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$ 使得 $\int_0^1\left|e^t-a_0-a_1t-a_2t^2\right|^2\mathrm{d}t$ 取最小值.

解答. 考虑 $L^2[0,1]$ 空间上的内积, 有

$$\begin{cases} a_0(1,1)+a_1(t,1)+a_2(t^2,1)=(e^t,1) \\ a_0(1,t)+a_1(t,t)+a_2(t^2,t)=(e^t,t) \\ a_0(1,t^2)+a_1(t,t^2)+a_2(t^2,t^2)=(e^t,t^2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0=39e-105 \\ a_1=-216e+588 \\ a_2=210e-570 \end{cases}.$$

✍ **题目1.6.15.** 设 $f\in C^2[a,b]$, 满足边界条件

$$f(a)=f(b)=0,\quad f'(a)=1,\quad f'(b)=0.$$

求证:

$$\int_a^b \left|f''(x)\right|^2 \mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}.$$

解答. 令 $f(x)\mapsto f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 后, 不妨设 $a=0,b=1$. 记 $g(x)=x(x-1)^2$, 则

$$\begin{aligned} &4\int_0^1 \left|f''(x)\right|^2 \mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 \left|g''(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \left|f''(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right) \\ \geq &\left|\int_0^1 f''(x)g''(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 g''(x)\mathrm{d}f'(x)\right| \\ = &\left|f'(1)g''(1)-f'(0)g''(0)-6\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right| = 1. \end{aligned}$$

✍ **题目1.6.16.** 设 H 是一个 Hilbert 空间, $a(x,y)$ 为共轭双线性函数, 并且存在 $M,\delta>0$ 使得

$$\delta\|x\|^2 \leq a(x,x) \leq M\|x\|^2,\quad \forall x\in H.$$

又设 $u_0\in H$, C 是 H 上的一个闭凸子集. 求证: 函数

$$x\mapsto a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$$

在 C 上达到最小值, 并且达到最小值的点 x_0 唯一, 满足

$$\mathrm{Re}(2a(x_0,x-x_0)-(u_0,x-x_0))\geq 0,\quad \forall x\in C.$$

解答. 由题目条件易知 $a(\cdot,\cdot)$ 也是 H 上的内积. 注意到

$$a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)\geq\delta\|x\|^2-\|u_0\|\cdot\|x\|>-\infty,$$

因此 $\alpha=\inf\limits_{x\in C}\big(a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)\big)$ 存在. 取 $\{x_n\}\subset C$ 使得

$$\alpha\leq a(x_n,x_n)-\mathrm{Re}(u_0,x_n)\leq\alpha+\frac{1}{n},\quad\forall n\geq 1.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta}\|x_n-x_m\|^2\leq a(x_n-x_m,x_n-x_m)\\
=&2a(x_n,x_n)+2a(x_m,x_m)-4a\Big(\frac{x_n+x_m}{2},\frac{x_n+x_m}{2}\Big)\\
\leq&2\Big(\mathrm{Re}(u_0,x_n)+\alpha+\frac{1}{n}\Big)+2\Big(\mathrm{Re}(u_0,x_m)+\alpha+\frac{1}{m}\Big)\\
&-4\Big(\mathrm{Re}(u_0,\frac{x_n+x_m}{2})+\alpha\Big)\\
=&\frac{2}{n}+\frac{2}{m}\to 0,\quad n,m\to\infty,
\end{aligned}$$

由 H 是 Hilbert 空间及 C 为闭集知, $x_n\to x_0\in C$, x_0 达到最小值. 如果还有 $y_0\in C$ 也取到最小值, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta}\|x_0-y_0\|^2\leq a(x_0-y_0,x_0-y_0)\\
=&2a(x_0,x_0)+2a(y_0,y_0)-4a\Big(\frac{x_0+y_0}{2},\frac{x_0+y_0}{2}\Big)\\
\leq&2\big(\mathrm{Re}(u_0,x_0)+\alpha\big)+2\big(\mathrm{Re}(u_0,y_0)+\alpha\big)-4\Big(\mathrm{Re}(u_0,\frac{x_0+y_0}{2})+\alpha\Big)=0,
\end{aligned}$$

从而 $x_0=y_0$. 为了证明题中不等式, 令

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t)=&a(tx+(1-t)x_0,tx+(1-t)x_0)-\mathrm{Re}(u_0,tx+(1-t)x_0)\\
&-a(x_0,x_0)+\mathrm{Re}(u_0,x_0)\geq 0,\quad\forall t\in[0,1],x\in C.
\end{aligned}$$

则必有

$$\varphi_x'(1) = \mathrm{Re}(2a(x_0, x - x_0) - (u_0, x - x_0)) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

B.2 线性算子与线性泛函

B.2.1 线性算子的概念

(本节各题中, X, Y 均指 Banach 空间)

✍ **题目2.1.1.** 求证: $T \in L(X, Y)$ 的充要条件是 T 为线性算子, 并将 X 中的有界集映为 Y 中的有界集.

解答. 必要性: 设 M 为 X 中的有界集, 满足 $\|x\| \leq R, \forall x \in M$. 则

$$|T(x)| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq R\|T\|, \quad \forall x \in X,$$

因此 $T(M)$ 也有界.

充分性: $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ 为 X 中的有界集, 因此

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |Tx| < \infty,$$

也即 T 连续.

✍ **题目2.1.2.** 设 $A \in L(X, Y)$, 求证:

(1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$; (2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} \|Ax\|$.

解答. (1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|A\| \cdot \|x\| = \|A\|$.

(2) 任取 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\|x\| = 1$ 满足 $\|A\| - \delta \leq \|Ax\| \leq \|A\|$, 其中 $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|+1-\varepsilon}$, 从而 $y = \frac{x}{1+\delta}$ 满足 $\|y\| < 1$ 并且

$$\|Ay\| = \frac{\|Ax\|}{1+\delta} \geq \frac{\|A\| - \delta}{1+\delta} = \|A\| - \varepsilon.$$

✍ **题目2.1.3.** 设 $f\in L(X,\mathbb{R})$, 求证:

(1) $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1} f(x)$; (2) $\sup\limits_{\|x\|<\delta} f(x)=\delta\|f\|,\quad \forall\delta>0.$

解答. (1) 只需注意到 $\forall x\in X$, $f(\mathrm{sign}(\overline{f(x)})x)=\mathrm{sign}(\overline{f(x)})f(x)=\left|f(x)\right|$.

(2) 结合 (1) 和上题 (2) 易得.

✍ **题目2.1.4.** 设 $y(t)\in C[0,1]$, 定义 $C[0,1]$ 上的泛函

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x\in C[0,1],$$

求 $\|f\|$.

解答.

$$\|f(x)\|\le\left(\int_0^1\left|y(t)\right|\mathrm{d}t\right)\|x\|\implies\|f\|\le\int_0^1\left|y(t)\right|\mathrm{d}t,$$
$$f(\overline{\mathrm{sign}(y)})=\int_0^1\left|y(t)\right|\mathrm{d}t\implies\|f\|\ge\int_0^1\left|y(t)\right|\mathrm{d}t.$$

✍ **题目2.1.5.** 设 f 是 X 上的非零有界线性泛函, 令

$$d=\inf\{\|x\|:f(x)=1,x\in X\},$$

求证: $\|f\|=\frac{1}{d}$.

解答. 若 $d=0$, 则存在 x_n 满足 $f(x_n)=1$ 且 $\|x_n\|\to0$, 由 f 的连续性知这是不可能的, 因此 $d>0$. 任取 x 满足 $f(x)=1$, 有

$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|=\frac{1}{\|x\|}\le\frac{1}{d}\implies\|f\|\le d.$$

取 y_n 满足 $f(y_n)=1$ 并且

$$d\le\|y_n\|\le d+\frac{1}{n},$$

从而

$$f\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)=\frac{1}{\|y_n\|}\ge\frac{1}{d+\frac{1}{n}},$$

由 n 的任意性, $\|f\| \geq \frac{1}{d}$.

✍ **题目2.1.6.** 设 $f \in X^*$, 求证: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $f(x_0) = \|f\|$, 且 $\|x_0\| < 1+\varepsilon$.

解答. 取 x 满足 $\|x\| = 1$ 且

$$\|f\| - \delta < f(x) \leq \|f\|,$$

其中 $\delta = \frac{\|f\|\varepsilon}{1+\varepsilon}$. 令 $x_0 = \frac{\|f\|}{f(x)} x$, 则

$$f(x_0) = \|f\|, \quad \|x_0\| = \frac{\|f\|}{f(x)} < \frac{\|f\|}{\|f\| - \delta} = 1+\varepsilon.$$

✍ **题目2.1.7.** 设 $T : X \to Y$ 是线性的, 令

$$N(T) \triangleq \{x \in X : Tx = 0\}.$$

(1) 若 $T \in L(X,Y)$, 求证: $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 问 $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间能否推出 $T \in L(X,Y)$?

(3) 若 f 是线性泛函, 求证

$$f \in X^* \Longleftrightarrow N(f) \text{ 是闭线性子空间.}$$

解答. (1) 设 $\{x_n\} \subset N(T), x_n \to x_0$, 则根据连续性以及 $Tx_n = 0$ 得 $Tx_0 = 0, x_0 \in N(T)$.

(2) 不能. 取赋范空间为 $(l^1, \|\cdot\|_\infty)$. 记 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x = \{x_n\}$, $a = (1,-1,0,0,\cdots)$. 又记

$$Tx = x - af(x).$$

f 显然是无界的, 因为 $f(x^{(m)}) = m$, 其中 $x_n^{(m)} = 1 (n \leq m), x_n^{(m)} = 0 (n > m)$.

下面证明 $N(T)$ 是闭线性子空间, 但 T 不是连续的.

先证 $N(T)$ 是闭线性子空间. 事实上若 $Tx = 0$, 则由 $a_n = 0 (n > 2)$ 知 $x_n = (Tx)_n = 0 (n > 2)$. 并且 $(Tx)_1 = x_1 - a_1 f(x) = -x_2 = 0, (Tx)_2 = x_2 - a_2 f(x) = x_1 = 0$, 故 $x = 0$. 从而 $N(T) = \{0\}$, 为闭线性子空间.

再证 T 不是连续的. 为此, 反设 T 有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $\|Tx\|_\infty \leq M\|x\|_\infty$,

从而

$$\left|f(x)\right|-1 \le \max\left\{\left|x_1-f(x)\right|,\left|x_2+f(x)\right|\right\} \le 1, \forall x=\{x_n\}\in l^1, \|x\|_\infty=1.$$

但 f 是无界的矛盾.

(3) 只需证明充分性. 若 f 无界, 则存在 $\|x_n\|=1$ 并且 $f(x_n)>n$. 令

$$y_n=\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)},$$

则 $y_n\in N(f)$, 并且 $y_n\to -\frac{x_1}{f(x_1)}\notin N(f)$, 矛盾.

✍ **题目2.1.8.** 设 f 是 X 上的线性泛函, 记

$$H_f^\lambda \triangleq \{x\in X: f(x)=\lambda\},\quad \forall \lambda\in\mathbb{K}.$$

如果 $f\in X^*$, 并且 $\|f\|=1$, 求证:

(1) $\left|f(x)\right|=\inf\limits_{z\in H_f^0}\|x-z\|,\quad \forall x\in X$;

(2) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, H_f^λ 上的任一点 x 到 H_f^0 的距离都等于 $|\lambda|$. 并对 $X=\mathbb{R}^2,\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 情形解释 (1) 和 (2) 的几何意义.

解答. (1) 首先, $\left|f(x)\right|=\left|f(x-z)\right|\le\|f\|\cdot\|x-z\|=\|x-z\|,\forall f(z)=0$, 因此 $\left|f(x)\right|\le \inf\limits_{z\in H_f^0}\|x-z\|$.

其次, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\|x_0\|=1$ 且 $1-\varepsilon\le f(x_0)\le 1$, 则

$$\inf_{z\in H_f^0}\|x-z\|\le\left\|x-\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)\right\|=\frac{\left|f(x)\right|}{\left|f(x_0)\right|}\|x_0\|\le\frac{\left|f(x)\right|}{1-\varepsilon},$$

由 ε 的任意性, $\inf\limits_{z\in H_f^0}\|x-z\|\le\left|f(x)\right|$.

(2) 由 (1), $\rho(x,H_f^0)=\left|f(x)\right|=|\lambda|$.

几何意义: $\mathbb{R}^2$ 上范数为 1 的线性泛函为 $f(x,y)=x\cos\theta+y\sin\theta$, 则 $H_f^0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: ax+by=0\}$ 为过零点的直线. (1) 也即空间上任意一点 (x,y) 到直线 $ax+by=0$ 的距离等于 $\left|f(x,y)\right|=\sqrt{x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta}$(点到直线距离公式).

✍ **题目2.1.9.** 设 X 是实赋范空间, f 是 X 上的非零实值线性泛函, 求证: 不存在开球

$B(x_0,\delta)$, 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $B(x_0,\delta)$ 中的极大值或极小值.

解答. 反设 f 使得

$$f(x_0) \le f(x), \quad \forall x \in B(x_0,\delta).$$

令 $x = x_0 + \delta y(\|y\| < 1)$, 则

$$f(y) \ge 0, \quad \forall \|y\| < 1.$$

这是不可能的, 因为存在 $\|y_0\| < 1$ 使得 $f(y_0) \ne 0$, 分别将 y_0 和 y_0 带入上式得到 $f(y_0)$ 既正又负, 矛盾.

B.2.2 Riesz 表示定理及其应用

(本节各题中的 H 均指 Hilbert 空间)

✍ **题目2.2.1**. 设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 H 上的一组有界线性泛函,

$$M \triangleq \bigcap_{k=1}^{n} N(f_k), \quad N(f_k) \triangleq \{x \in H : f_k(x) = 0\}, \quad k = 1,\cdots,n.$$

$\forall x_0 \in H$, 记 y_0 为 x_0 在 M 上的正交投影, 求证: 存在 $y_k \in N(f_k)^{\perp}(1 \le k \le n)$ 及 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ 使得

$$y_0 = x_0 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k.$$

解答. 取 $y_k \in H$ 满足 $f_k(x) = (x, y_k), \forall x \in H, 1 \le k \le n$. 则

$$\begin{aligned}
M &= \{y_1,\cdots,y_n\}^{\perp},\\
M^{\perp} &= \left(\{y_1,\cdots,y_n\}^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span}\{y_1,\cdots,y_n\},\\
N(f_k)^{\perp} &= \{f_k\}^{\perp},\\
N(f_k) &= \left(\{f_k\}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbb{K} y_k.
\end{aligned}$$

再由 $x_0 - y_0 \in M^{\perp}$ 知题中所求 $\alpha_k(1 \le k \le n)$ 必存在.

✍ **题目2.2.2.** 设 l 是 H 上的实值有界线性泛函, C 是 H 中的一个闭凸子集. 又设

$$f(v)=\frac{1}{2}\|v\|^2-l(v)\quad \forall v\in C.$$

(1) 求证: 存在 $u^*\in H$ 使得

$$f(v)=\frac{1}{2}\left\|u^*-v\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|u^*\right\|^2,\quad \forall v\in C.$$

(2) 求证: 存在唯一的 $u_0\in C$ 使得 $f(u_0)=\inf\limits_{v\in C}f(v)$.

解答. (1) 取 $u^*\in H$ 使得 $l(v)=(v,u^*),\forall v\in H$. 则对 $\forall v\in C$, 有

$$f(v)=\frac{1}{2}\left(\|v\|^2-2(v,u^*)+\left\|u^*\right\|^2-\left\|u^*\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left\|u^*-v\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|u^*\right\|^2.$$

(2) $\inf\limits_{v\in C}f(v)=\frac{1}{2}\rho(u^*,C)-\frac{1}{2}\|u^*\|$, 有正交分解, 必能唯一取到.

✍ **题目2.2.3.** 设 H 的元素是定义在集合 S 上的复值函数. 又若 $\forall x\in S$, 由

$$J_x(f)=f(x),\quad \forall f\in H$$

定义的映射 $J_x:H\to\mathbb{C}$ 是 H 上的连续线性泛函. 求证: 存在 $S\times S$ 上的复值函数 $K(x,y)$, 适合条件:

(1) 对任意固定的 $y\in S$, 作为 x 的函数有 $K(x,y)\in H$;

(2) $f(y)=(f,K(\cdot,y)),\forall f\in H,y\in S$.

满足如上条件的函数 $K(x,y)$ 称为 H 的再生核.

解答. 对给定的 $x\in S$, 由 Riesz 表示定理, 存在 $K_x\in H$ 使得

$$(f,K_x)=J_x(f),\quad \forall f\in H.$$

令 $K(x,y)=(K_y,K_x)(\forall x,y\in S)$, 则对任意固定的 $y\in S$,

$$K(x,y)=(K_y,K_x)=J_x(K_y)=K_y(x)\in H.$$

并且

$$f(y) = J_y(f) = (f, K_y) = (f, K(\cdot, y)), \quad \forall f \in H, y \in S.$$

✍ **题目2.2.4.** 求证: $H^2(D)$(开单位球上所有平方可积解析函数) 的再生核为

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}, \quad \forall z, w \in D.$$

解答. 记 $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1} (z \in D), n = 1, 2, \cdots$, 则 $\{\varphi_n\}$ 是 $H^2(D)$ 的一组正交规范基. 注意到

$$K_z = \sum_{n=1}^{\infty} (K_z, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(z)}\varphi_n, \quad \forall z \in D.$$

故

$$\begin{aligned} K(z,w) = (K_w, K_z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)} \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n(z\overline{w})^{n-1} = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}, \quad \forall z, w \in D. \end{aligned}$$

✍ **题目2.2.5.** 设 L, M 是 H 上的闭线性子空间, 求证:

(1) $L \perp M \iff P_L P_M = 0$;

(2) $L = M^{\perp} \iff P_L + P_M = I$(恒等映射);

(3) $P_L P_M = P_{L\cap M} \iff P_L P_M = P_M P_L$.

解答. 根据正交投影算子的定义, 有 $P_M(x) = x(\forall x \in M)$, $P_M^2 = P_M$, 以及 $x \perp M \iff P_M(x) = 0$.

(1) $L \perp M \iff x \perp L(\forall x \in M) \iff P_L(x) = 0(\forall x \in M) \iff P_L P_M = 0$.

(2) 若 $L = M^{\perp}$, 则任取 $x \in H$, 有 $P_L(x) \perp M$, 由正交分解的唯一性, $x - P_L(x) = P_M(x)$.

若 $P_L + P_M = I$, 则任取 $x \in L$, 有 $x = P_L(x) + P_M(x) = x + P_M(x) \implies P_M(x) = 0(\forall x \in L) \implies x \perp M(\forall x \in L) \implies L \perp M$.

(3) 注意到 $(P_M x, y) = (P_M x, P_M y + (y - P_M y)) = (P_M x, P_M y) = (P_M x + (x - P_M x), P_M y) = (x, P_M y), \forall x, y \in H$, 因此 $(P_M x, y) = (x, P_M y)$.

若 $P_L P_M = P_{L\cap M}$, 则

$$(P_M P_L x, y) = (P_L x, P_M y) = (x, P_L P_M y) = (x, P_{L\cap M} y) = (P_{L\cap M} x, y), \quad \forall x, y \in H,$$

故 $P_M P_L = P_{L\cap M} = P_L P_M$.

对任意的 P_L 和 P_M, 由 $M \cap L \subset M \perp I - P_M$ 并且 $M \cap L \subset L \perp P_M - P_L P_M$, 知 $I - P_L P_M = (I - P_M) + (P_M - P_L P_M) \perp L \cap M$. 同理也有 $I - P_M P_L \perp L \cap M$.

若 $P_L P_M = P_M P_L$, 则 $P_L P_M = P_M P_L \in L\cap M$, 并且 $x - P_L P_M \perp L\cap M$, 因此 $P_L P_M = P_{L\cap M}$.

B.2.3 纲与开映射定理

✍ **题目2.3.1.** 设 X 是 Banach 空间, X_0 是 X 的闭子空间. 映射 $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为

$$\varphi : x \mapsto [x], \quad \forall x \in X.$$

求证 φ 是开映射.

解答. 显然 $\|\varphi(x)\| = \|[x]\|_0 \le \|x\|$ 且 φ 是满射, X/X_0 完备, 因此由开映射定理 φ 是开映射.

✍ **题目2.3.2.** 设 X, Y 是 Banach 空间, 方程 $Ux = y$ 对 $\forall y \in Y$ 有解 $x \in X$, 其中 $U \in L(X, Y)$, 并且存在 $m > 0$ 使得

$$\|Ux\| \ge m\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

求证: U 有连续逆 U^{-1} 并且 $\|U^{-1}\| \le \frac{1}{m}$.

解答. U 显然是满射, 并且若 $Ux = Uy$, 则 $m\|x - y\| \le \|Ux - Uy\| = 0 \implies x = y$, 因此 U 是双射. 在 $\|Ux\| \ge m\|x\|$ 中取 $y = Ux$ 即得到

$$\|U^{-1}y\| \le \frac{1}{m}\|y\|, \quad \forall y \in Y,$$

因此 U^{-1} 连续且 $\|U^{-1}\| \le \frac{1}{m}$.

✍ **题目2.3.3.** 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$, 并且存在 $m > 0$ 使得

$$|(Ax,x)| \geq m\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

求证: 存在 $A^{-1} \in L(H)$.

解答. 取 $a(x,y) = (x, Ay)$ 为共轭双线性函数, 满足

$$\left|a(x,y)\right| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \left\|y\right\|, \quad \forall x, y \in H,$$

由 Lax-Milgram 定理, 存在 $A^{-1} \in L(H)$.

✍ **题目2.3.4.** 设 X, Y 是赋范空间, D 是 X 的子空间, 并且 $A: D \to Y$ 是线性映射. 求证:

(1) 如果 A 连续且 D 是闭的, 那么 A 是闭算子;

(2) 如果 A 连续且是闭算子, 那么 Y 完备蕴含 D 闭;

(3) 如果 A 是单射的闭算子, 那么 A^{-1} 也是闭算子;

(4) 如果 X 完备, A 是单射的闭算子, $R(A)$ 在 Y 中稠密, 并且 A^{-1} 连续, 那么 $R(A) = Y$.

解答. (1) 设 $D \ni x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$, 则由 D 是闭集知 $x \in D$, 由 T 的连续性知 $Tx_n \to Tx = y$, 故 A 是闭算子.

(2) 设 $D \ni x_n \to x$, 由 T 连续知 Tx_n 为 Y 中 Cauchy 列, 因此收敛于 $y \in Y$, 而 T 还是闭算子, 因此 $x \in D$, D 为闭集.

(3) 设 $A(D) \ni Ax_n \to y$ 并且 $A^{-1}(Ax_n) \to x \in X$, 则 $D \ni x_n \to x$ 且 $Ax_n \to y$, 由闭算子定义, $x \in D, y = Ax$, 因此 $y \in A(D), x = A^{-1}y$, A^{-1} 也是闭算子.

(4) 由于 A 是单射的闭算子, 因此由 (3)A^{-1} 也是闭算子. 而 A^{-1} 还是连续的, 由 (2), $R(A) = \overline{R(A)} = Y$.

✍ **题目2.3.5.** 用等价范数定理证明: $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 不是 Banach 空间, 其中 $\left\|f\right\|_1 = \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t, \forall f \in C[0,1]$.

解答. 反设 $C[0,1]$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 构成 Banach 空间, 而其关于 $\|\cdot\|_\infty$ 也构成 Banach 空间, 并且 $\|\cdot\|_\infty$ 显然比 $\|\cdot\|_1$ 强, 因此由等价范数定理这两个范数等价, 但是

$$\left\|(1-nx)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\right\|_\infty = n, \quad \left\|(1-nx)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\right\|_1 = \frac{1}{2},$$

矛盾.

✍ **题目2.3.6.** (Gelfand 引理) 设 X 是 Banach 空间, $p:X\to\mathbb{R}$ 满足

(1) $p(x)\geq 0,\quad \forall x\in X$;

(2) $p(\lambda x)=\lambda p(x),\quad \forall \lambda>0, x\in X$;

(3) $p(x_1+x_2)\leq p(x_1)+p(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in X$;

(4) $x_n\to x \implies \liminf\limits_{n\to\infty} p(x_n)\geq p(x)$.

求证: 存在 $M>0$ 使得 $p(x)\leq M\|x\|, \forall x\in X$.

解答.

方法一.(等价模定理) 注意到

$$p(\alpha x)\leq p(\operatorname{Re}\alpha x)+p(\operatorname{Im}\alpha i x)\leq \max\{p(\pm x)+p(\pm i x)\},\quad \forall x\in X, |\alpha|=1,$$

因此可以定义范数

$$\|x\|_p=\|x\|+\sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x),\quad \forall x\in X.$$

由等价模定理, 只需证明 X 关于 $\|\cdot\|_p$ 完备. 设 $\{x_n\}$ 是 X 上关于 $\|\cdot\|_p$ 的 Cauchy 列. 由于 $\|\cdot\|_p$ 比 $\|\cdot\|$ 强, 因此 $\{x_n\}$ 也是 $\|\cdot\|$ 的 Cauchy 列, 再根据 X 的完备性, $\{x_n\}$ 收敛于 x. 从而

$$\left|p(x)-p(x_n)\right|\leq p(x-x_n)\leq \liminf_{m\to\infty} p(x_m-x_n)\to 0,\quad n\to\infty,$$

因此 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|_p$ 收敛于 x.

方法二.(Baire 纲定理) 记

$$E_n=\{x\in X: p(x)\leq n \quad \text{且} \quad p(-x)\leq n\},$$

则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 设 $x_n\to x$, 则

$$\begin{cases} p(x)\leq \liminf\limits_{n\to\infty} p(x_n)\leq n \\ p(-x)\leq \liminf\limits_{n\to\infty} p(-x_n)\leq n \end{cases} \implies x\in E_n,$$

故每个 E_n 都是闭集. 由 Baire 纲定理及 X 的完备性, 存在 E_n 不是疏集, 即存在 $B(x_0,r)\subset E_n$. 根据 E_n 的定义, $B(-x_0,r)\subset E_n$, 而 E_n 显然还是一个凸集, 因此 $B(0,r)=\frac{1}{2}B(x_0,r)+\frac{1}{2}B(-x_0,r)\subset E_n$. 任取 $x\neq 0$, 有

$$p\left(\frac{rx}{2\|x\|}\right)\leq n \implies p(x)\leq \frac{2n}{r}\|x\|,$$

取 $M=\frac{2n}{r}$ 即可.

✍ **题目2.3.7.** 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $\{A_n\}\subset L(X,Y)$. 又对 $\forall x\in X$, $\{A_nx\}$ 在 Y 中收敛. 求证: 存在 $A\in L(X,Y)$ 使得

$$A_nx\to Ax,\quad \forall x\in X\quad 并且\quad \|A\|\leq \liminf_{n\to\infty}\|A_n\|.$$

解答. 记 $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx(\forall x\in X)$ 为线性算子. 由于 A_nx 收敛, 因此 $\sup\limits_{n\geq 1}\|A_nx\|<\infty(\forall x\in X)$, 由共鸣定理, $\liminf\limits_{n\to\infty}\|A_n\|\leq\sup\limits_{n\geq 1}\|A_n\|<\infty$. 从而

$$\|Ax\|=\lim_{n\to\infty}\|A_nx\|\leq\liminf_{n\to\infty}\|A_n\|\cdot\|x\|,\quad \forall x\in X.$$

✍ **题目2.3.8.** 设 $1<p<\infty$ 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x=\{x_k\}\in l^p$ 保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kx_k$ 收敛. 求证: $\{\alpha_k\}\in l^q$. 又若 $f:x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kx_k$, 求证: f 作为 l^p 上的线性泛函, 有

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

解答. 记 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_kx_k\in(l^p)^*$. 由于对每个 $x\in l^p$, $f_n(x)\to f(x)$, 因此 $\sup\limits_{n\geq 1}\left|f_n(x)\right|<\infty$, 根据共鸣定理, 存在 $M>0$ 使得 $\left\|f_n\right\|\leq M(\forall n\geq 1)$.

又记 x 满足 $x_k=\mathrm{sign}(\overline{\alpha}_k)|\alpha|^{q-1}(\forall k\geq 1)$, $x^{(n)}\in l^p$ 为前 n 项与 x 相等, 其余项均为 0 的点. 因此

$$f(x^{(n)})=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q=f_n(x^{(n)})\leq M\left\|x^{(n)}\right\|_p=M\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

整理得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le M, \quad \forall n \ge 1,$$

令 $n\to\infty$ 即得到 $\alpha\in l^q$. 由

$$f(x)=\|\alpha\|_q^q=\|\alpha\|_q\cdot\|x\|_p, \quad \left|f(y)\right|\le\|\alpha\|_q\cdot\left\|y\right\|_p, \quad \forall y\in l^p$$

得 $\left\|f\right\|=\|\alpha\|_q$.

✍ **题目2.3.9.** 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 对 $\forall x=\{x_k\}\in l^1$, 保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\}\in l^\infty$. 又若 $f: x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$ 作为 l^1 上的线性泛函, 求证:

$$\left\|f\right\|=\sup_{k\ge1}|\alpha_k|.$$

解答. 记 $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\in(l^1)^*$. 由于对每个 $x\in l^1$, $f_n(x)\to f(x)$, 因此 $\sup\limits_{n\ge1}\left|f_n(x)\right|<\infty$, 根据共鸣定理, 存在 $M>0$ 使得 $\left\|f_n\right\|\le M(\forall n\ge1)$.

又记 $e^{(n)}$ 为第 n 项为 1 其余均为 0 的点, 因此

$$\left|f(e^{(n)})\right|=|\alpha_n|=f_n(e^{(n)})\le M\left\|e^{(n)}\right\|_1=M, \quad \forall n\ge1,$$

在上式左侧对 n 取上界得 $\alpha\in l^\infty$. 再由

$$\left|f(x)\right|\le\|\alpha\|_\infty\cdot\|x\|_1, \quad \forall x\in l^1,$$

以及存在 $\{n_k\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\left|\alpha_{n_k}\right|=\|\alpha\|_\infty \Longrightarrow \left|f(\alpha_{n_k}e_{n_k})\right|\to\|\alpha\|_\infty^2,$$

知 $\left\|f\right\|=\|\alpha\|_\infty$.

✍ **题目2.3.10.** 用 Gelfand 引理证明共鸣定理.

解答. 设 X 为 Banach 空间, Y 为赋范空间, $W \subset L(X,Y)$ 满足

$$\sup_{A\in W}\|Ax\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

令 $p(x) = \sup_{A\in W}\|Ax\|$, 则 p 显然满足 Gelfand 引理的条件 (1)(2)(3). 对 (4), 反设存在 $x_n \to x_0$ 但 $p(x_0) > \alpha > \liminf_{n\to\infty} p(x_n)$. 由下极限定义, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{y_n\}$ 使得

$$p(x_0) > \alpha \geq p(y_n), \quad \forall n \geq 1.$$

因为 $p(x_0) > \alpha$, 存在 $A_0 \in W$ 使得 $\|A_0x_0\| > \alpha$, 从而

$$\|A_0x_0\| > \alpha \geq p(y_n) \geq \left\|A_0y_n\right\|, \quad \forall n \geq 1,$$

在上式中令 $n \to \infty$, 得到 $\|A_0x_0\| > \alpha \geq \|A_0x_0\|$, 矛盾. 因此 p 满足 Gelfand 引理所有条件, 故存在 $M > 0$ 使得 $p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in X \implies \|A\| \leq M, \forall A \in W$.

✍ **题目2.3.11**. 设 X, Y 是 Banach 空间, $A \in L(X,Y)$ 是满射. 求证: 如果在 Y 中 $y_n \to y_0$, 则存在 $C > 0$ 与 $x_n \to x_0$ 使得 $Ax_n = y_n$ 并且 $\|x_n\| \leq C\left\|y_n\right\|$.

解答. 记 $N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ 为闭子空间, $T : X/N(A) \to Y, [x] \to Ax$, 是良定义的双射, 因为 $[x] = [y] \iff [x-y] = N(A) \iff x - y \in N(A) \iff A(x-y) = 0 \iff Ax = Ay$. T 还是连续的, 因为

$$\|T[x]\| = \inf_{Ay=Ax}\left\|Ay\right\| \leq \|A\| \inf_{y\in[x]}\left\|y\right\| = \|A\| \cdot \|[x]\|_0.$$

由 Banach 逆算子定理, T^{-1} 连续, 从而对 $Ax_0 = y_0$, 有

$$\inf_{Ax=y_n}\|x - x_0\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \cdot \left\|y_n - y_0\right\| \to 0,$$

存在 x_n 使得 $Ax_n = y_n$ 且

$$\|x_n - x_0\| \leq 2\inf_{Ax=y_n}\|x - x_0\| \leq 2\left\|T^{-1}\right\| \cdot \left\|y_n - y_0\right\| \to 0,$$

因此 $x_n \to x_0$. 若 $y_0 = 0$, 取 $C = 2\|T^{-1}\|$. 若 $y_0 \neq 0$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对充分大 (不妨设是所有) 的 n 有 $\|y_n\| > \varepsilon_0$. 因此

$$\begin{aligned}\|x_n\| &\le \|x_n - x_0\| + \|x_0\| \le 2\|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_0\| + \|x_0\| \\ &\le 2\|T^{-1}\| \cdot \|y_n\| + 2\|T^{-1}\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \\ &\le \left(2\|T^{-1}\| + \frac{2\|T^{-1}\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\|}{\varepsilon}\right)\|y_n\|, \quad \forall n \ge 1.\end{aligned}$$

✍ **题目2.3.12.** 设 X, Y 是 Banach 空间, T 是闭线性算子, $D(T) \subset X, \mathbb{R}(T) \subset Y, N(T) \triangleq \{x \in X : Tx = 0\}$. 求证:

(1) $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2) 若 $N(T) = \{0\}$, 则 $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是: 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\|x\| \le \alpha\|Tx\|, \quad \forall x \in D(T).$$

(3) $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是: 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$d(x, N(T)) \le \alpha\|Tx\|, \quad \forall x \in D(T).$$

解答. (1) 设 $Tx_n = 0$ 且 $x_n \to x, Tx_n \to Tx$, 因此 $Tx = 0, x \in N(T)$, $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2) 由于 $N(T) = \{0\}$, 因此 T 是单射, $\|x\| \le \alpha\|Tx\|(\forall x \in D(T)) \iff \|T^{-1}y\| \le \alpha\|y\|(\forall y \in R(D)) \iff T^{-1}$ 连续 $\xLeftrightarrow[X\text{完备}]{T^{-1}\text{是闭算子}} R(T)$ 闭.

(3) 令 $\tilde{T} : D(T)/N(T) \to R(T), [x] \mapsto Tx$ 为良定义的双射, 且 $R(\tilde{T}) = R(T)$, 因此由 (2), $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是: 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$d(x, N(T)) = \|[x]\|_0 \le \alpha\|\tilde{T}[x]\| = \alpha\|Tx\|, \quad \forall x \in D(T).$$

✍ **题目2.3.13.** 设 $a(x, y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函, 满足

(1) 存在 $M > 0$ 使得 $|a(x, y)| \le M\|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in H$;

(2) 存在 $\delta > 0$ 使得 $|a(x,x)| \geq \delta \|x\|^2, \quad \forall x \in H$.

求证: $\forall f \in H^*$, 存在唯一的 $y_f \in H$ 使得

$$a(x, y_f) = f(x), \quad \forall x \in H,$$

而且 y_f 连续地依赖于 f.

解答. 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一有连续逆的 $A \in L(H)$ 使得

$$a(x,y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 z_f, $\|z_f\| = \|f\|$ 且

$$f(x) = (x, z_f) = a(x, A^{-1} z_f), \quad \forall x \in H,$$

若 $\|f\| \to 0$, 则 $\|z_f\| \to 0$, $\|y_f\| \to 0$, 因此 y_f 连续地依赖于 f.

✍ **题目2.3.14.** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中边界光滑的开区域, $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ 有界可测并满足 $0 < \alpha_0 \leq \alpha$, $f \in L^2(\Omega)$. 规定:

$$a(u,v) \triangleq \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha u v) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$
$$F(v) \triangleq \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

求证: 存在唯一的 $u \in H^1(\Omega)$ 满足

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

解答. $H^1(\Omega)$ 关于内积

$$(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

构成一个 Hilbert 空间, 且由 Poincare 不等式知存在 $C>0$ 使得

$$\|u\|_2=\sqrt{\int_\Omega |u|^2}\le C\|u\|,\quad \forall u\in H^1(\Omega).$$

设 M 是 α 的上界, 则 $a(x,y)$ 是 $H^1(\Omega)$ 上的共轭双线性函数, 满足

(1) $|a(u,v)|\le \|u\|\cdot\|v\|+M\|u\|_2\cdot\|v\|_2\le (C^2M+1)\|u\|\cdot\|v\|,\quad \forall u,v\in H^1(\Omega)$;

(2) $|a(u,u)|\ge \int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\|u\|^2,\quad \forall u\in H^1(\Omega)$.

注意到

$$|F(v)|\le \left\|f\right\|_2\cdot\|v\|\le C\left\|f\right\|_2\cdot\|v\|,\quad \forall v\in H^1(\Omega),$$

因此可以 F 视作 $H^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函, 则由上一题结论, 存在唯一的 $u\in H^1(\Omega)$ 满足

$$a(u,v)=F(v),\quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

B.2.4 Hahn-Banach 定理

✍ **题目2.4.1.** 设 p 是实线性空间 X 上的次线性泛函, 求证:

(1) $p(0)=0$;

(2) $p(-x)\ge -p(x)$;

(3) 任意给定 $x_0\in X$, 在 X 上必有实线性泛函 f, 满足 $f(x_0)=p(x_0)$ 以及 $f(x)\le p(x)(\forall x\in X)$.

证明. (1) 由正齐次性, $p(0)=p(2\cdot 0)=2p(0)\implies p(0)=0$.

(2) $p(x)+p(-x)\ge p(x+(-x))=p(0)=0$.

(3) 对 $\mathbb{R}x_0$ 上的线性泛函 $f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$ 使用 Hahn-Banach 定理即可. □

✍ **题目2.4.2.** 设 X 是由实数列 $x=\{x_n\}$ 全体组成的实线性空间, 其元素间相等和线性运算都按坐标定义, 并定义

$$p(x)=\limsup_{n\to\infty}\alpha_n,\quad \forall x=\{x_n\}\in X.$$

求证: $p(x)$ 是次线性泛函.

解答. 只需验证 $p(x+y) \le p(x)+p(y)$, 也即

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

对

$$\sup_{k\ge n}(x_k+y_k) \le \sup_{k\ge n} x_k + \sup_{k\ge n} y_k$$

不等式两边同时取 $\inf\limits_{n\ge1}$ 即可.

✍ **题目2.4.3.** 设 X 是复线性空间, p 是 X 上的半范数. 又设 $x_0 \in X$ 满足 $p(x_0) \ne 0$. 求证: 存在 X 上的线性泛函 f 满足

(1) $f(x_0)=1$;

(2) $\left|f(x)\right| \le \frac{p(x)}{p(x_0)}, \quad \forall x \in X.$

解答. 记 $f_0(\lambda x_0)=\lambda(\forall \lambda \in \mathbb{C})$, 则

$$\left|f_0(\lambda x_0)\right| = |\lambda| = \frac{p(|\lambda| x_0)}{p(x_0)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

再使用复 Hahn-Banach 定理即可.

✍ **题目2.4.4.** 设 X 是赋范空间, $\{x_n\} \subset X$. 如果 $\forall f \in X^*$, $\{f(x_n)\}$ 都有界, 求证: $\{x_n\}$ 在 X 内有界.

证明. 记 $J: X \to X^{**}$ 满足 $<Jx, f>=<f, x>$ $(\forall f \in X^*)$. 下面证明 J 是等距映射. 由

$$\left|<Jx,f>\right| = \left|<f,x>\right| \le \|x\| \cdot \left\|f\right\|, \quad \forall f \in X^*$$

可得 $\|Jx\|\|x\|$. 由 Hahn-Banach 定理, 对每个 $x \in X$, 存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(x)=\|x\| \quad \text{且} \quad \left\|f\right\|=1,$$

因此 $\|Jx\|=\|x\|$, J 是等距映射.

注意到

$$\sup_{n\ge1}\left|<Jx_n,f>\right| = \sup_{n\ge1}\left|f(x_n)\right| < \infty, \quad \forall f \in X^*,$$

因此由共鸣定理, $\sup\limits_{n\geq 1}\|Jx_n\|<\infty$, 也即 $\sup\limits_{n\geq 1}\|x_n\|<\infty$. □

✍ **题目2.4.5.** 设 X_0 是赋范空间 X 的闭子空间, 求证:

$$\rho(x, X_0) = \sup\{\left|f(x)\right| : \left\|f\right\| = 1, f(X_0) = 0\}, \quad \forall x \in X.$$

解答. 记等式右侧为 α. 由 $\left|f(x)\right| = \left|f(x-y)\right| \leq \left\|f\right\| \cdot \left\|x-y\right\| = \left\|x-y\right\|, \forall y \in X_0$ 知 $\alpha \leq \rho(x, X_0)$.

下面证明 $\rho(x, X_0) \leq \alpha$. 若 $x \in X_0$, 则 $\rho(x, X_0) = \alpha = 0$. 现设 $x \notin X_0$, 则 $\rho(x, X_0) > 0$, 由 Hahn-Banach 定理知存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(x) = \rho(x, X_0), \quad \left\|f\right\| = 1 \quad 且 \quad f(X_0) = 0,$$

因此 $\rho(x, X_0) \leq \alpha$.

✍ **题目2.4.6.** 设 X 是赋范空间. 给定 X 中 n 个线性无关的元素 $x_1, \cdots, x_n$ 与数域 $\mathbb{K}$ 中的 n 个数 $C_1, \cdots, C_n$, 及 $M > 0$. 求证: 存在 $f \in X^*$ 满足 $f(x_k) = C_k (1 \leq k \leq n)$ 并且 $\left\|f\right\| \leq M$ 的充要条件是:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k\right| \leq M \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right\|, \quad \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

解答. 必要性:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)\right| = \left|f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)\right| \leq \left\|f\right\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right\| \leq M \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right|.$$

充分性: 定义

$$f_0\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k (\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}), \quad p(x) = M\|x\| (\forall x \in X),$$

并使用复 Hahn-Banach 定理即可.

✍ **题目2.4.7.** 给定赋范空间 X 中的 n 个线性无关的元素 $x_1, \cdots, x_n$, 求证: 存在 $f_1, \cdots, f_n \in$

X^* 使得

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

解答. 记

$$M_k = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n\}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

注意到 $\rho(x_k, M_k) > 0$, 因此由 Hahn-Banach 定理, 存在 $g_k \in X^*$ 使得

$$\|g_k\| = 1, \quad g_k(x_k) = \rho(x_k, M_k), \quad g_k\big|_{M_k} = 0, \quad k = 1, \cdots, n,$$

取 $f_k = \frac{g_k}{\rho(x_k, M_k)}$ 即可.

✍ **题目2.4.8.** 设 X 是线性空间, 求证: M 是 X 的极大线性子空间当且仅当 $\dim(X/M) = 1$.

解答. 必要性: 取 $M = [0] \neq x_0 + M \in X/M$, 则 $x_0 \notin M$. 由于 M 是极大线性子空间, $X = \mathbb{K}x_0 \oplus M$. 任取 $x + M \in X/M$, 存在 $\alpha \in \mathbb{K}, y \in M$ 使得

$$x = \lambda x_0 + y \implies x + M = \lambda x_0 + M \implies X/M = \mathbb{K}(x_0 + M),$$

故 $\dim(X/M) = 1$.

充分性: 任取 $x_0 \notin M$, $x_0 + M \neq [0] = M$, 由于 X/M 是一维的,

$$X/M = \mathbb{K}(x_0 + M).$$

故 $\forall x \in X$, 存在 $\lambda \in K$ 使得 $x + M = \lambda x_0 + M \implies x - \lambda x_0 \in M \implies X = \mathbb{K}x_0 \oplus M \implies M$ 是极大线性子空间.

✍ **题目2.4.9.** 设 X 是复线性空间, E 是 X 中的非空均衡集合 (即 $E = \alpha E, \forall |\alpha| = 1$), f 是 X 上的线性泛函. 求证:

$$\left|f(x)\right| \le \sup_{y \in E} \operatorname{Re} f(y), \quad \forall x \in E.$$

解答. 任取 $x \in E$, 有 $y = (\operatorname{sign} f(x))x \in E$ 并且

$$\left|f(x)\right| = f(y) = \operatorname{Re} f(y) \implies \left|f(x)\right| \le \sup_{y\in E} \operatorname{Re} f(y).$$

✍ **题目2.4.10.** 设 X 是赋范空间, $E \subset X$ 是非空均衡闭凸集, $x_0 \in X \setminus E$. 求证: 存在 $f \in X^*$ 和 $\alpha > 0$ 使得

$$\left|f(x)\right| < \alpha < \left|f(x_0)\right|, \quad \forall x \in E.$$

解答. 由 Ascoli 定理, 存在 X 上的实有界线性泛函 u 和 $s \in \mathbb{R}$ 使得

$$u(x) < s < u(x_0), \quad \forall x \in E.$$

令 $f(x) = u(x) - iu(ix)(\forall x \in X)$, 不难验证 f 是 X 上的复有界线性泛函. 由上题,

$$\sup_{x\in E}\left|f(x)\right| \le \sup_{y\in E} u(y) \le s < u(x_0) \le \left|f(x_0)\right|,$$

取 $\alpha \in (s, u(x_0))$ 即可.

✍ **题目2.4.11.** 设 E, F 是实赋范空间 X 中的两个互不相交的非空凸集, 并且 E 是开的和均衡的. 求证: 存在 $f \in X^*$ 使得

$$\left|f(x)\right| < \inf_{y\in F}\left|f(y)\right|, \quad \forall x \in E.$$

解答. 由凸集分离定理, 存在 $f \in X^*$ 使得

$$\sup_{x\in E} f(x) \le \inf_{y\in F} f(y) \le \inf_{y\in F}\left|f(y)\right|,$$

由于 E 是均衡的, 上式即

$$\sup_{x\in E}\left|f(x)\right| \le \inf_{y\in F}\left|f(y)\right|.$$

由于 E 是开集, 因此 $\left|f(x)\right|$ 在 E 上取到最大值, 从而

$$\left|f(x)\right| < \inf_{y\in F}\left|f(y)\right|, \quad \forall x \in E.$$

✍ **题目2.4.12.** 设 C 是实赋范空间 X 中的一个凸集, $x_0 \in C^\circ, x_1 \in \partial C, x_2 = m(x_1 - x_0) + x_0 (m > 1)$. 求证: $x_2 \notin C$.

解答. 反设 $x_2 \in C$. 由 $x_0 \in C^\circ$ 知存在 $r > 0$ 使得 $B(x_0, r) \subset C$. 因此

$$\begin{aligned}&B\left(x_1, (1-\frac{1}{m})r\right) = x_1 + (\frac{1}{m} - 1)x_0 + B\left((1-\frac{1}{m})x_0, (1-\frac{1}{m})r\right)\\ =&\frac{1}{m}x_2 + (1-\frac{1}{m})B(x_0, r) \subset E,\end{aligned}$$

因此 $x_1 \in C^\circ$, 矛盾.

✍ **题目2.4.13.** 设 M 是赋范空间 X 中的闭凸集, 求证: 任取 $x \in X \setminus M$, 存在 $f_1 \in X^*$ 满足 $\|f_1\| = 1$ 并且

$$\sup_{y\in M} f_1(y) \le f_1(x) - \rho(x, M).$$

解答. 记 $d = \rho(x, M) > 0$, 则 $B(x, d) \cap M = \varnothing$, 由凸集分离定理, 存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(y) \le f(x + dz), \quad \forall y \in M, \|z\| < 1.$$

不妨设 $\|f\| = 1$(否则令 $f_1 = \frac{f}{\|f\|}$ 依旧满足上式). 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\|z_0\| < 1$ 使得

$$1 - \varepsilon \le f(z_0) \le 1,$$

从而

$$\sup_{y\in M} f(y) \le f(x - dz_0) = f(x) - df(z_0) \le f(x) - d(1-\varepsilon).$$

由 ε 任意性, $\sup\limits_{y\in M} f(y) \le f(x) - d$.

✍ **题目2.4.14.** 设 M 是实赋范空间 X 内的闭凸集, 求证:

$$\inf_{z\in M}\|x-z\| = \sup_{\|f\|=1}\left(f(x)-\sup_{z\in M}f(z)\right), \quad \forall x\in X.$$

解答. 若记上式右侧为 α, 则

$$\alpha = \sup_{\|f\|=1}\inf_{z\in M}f(x-z) \le \sup_{\|f\|=1}\inf_{z\in M}\left\|f\right\|\cdot\|x-z\| = \inf_{z\in M}\|x-z\|.$$

另一方面, 由上题, 存在 $f_1\in X^*$ 且 $\left\|f_1\right\|=1$ 使得

$$\rho(x,M)\le f_1(x)-\sup_{z\in M}f_1(z)\le\alpha,$$

因此 $\rho(x,M)=\alpha$.

✍ **题目2.4.15.** 设 X 是 Banach 空间, $f: X\to\overline{\mathbb{R}}(\triangleq\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ 是连续的凸泛函, 并且 $f(x)\not\equiv\infty$. 若定义 $f^*: X^*\to\overline{\mathbb{R}}$ 为

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\left(<x^*,x>-f(x)\right), \quad \forall x^*\in X^*,$$

求证: $f^*(x^*)\not\equiv\infty$.

解答. 给定 $x_0\in X$ 使得 $\left|f(x_0)\right|<\infty$. 由于 f 在 x_0 处连续, 因此 $\partial f(x_0)$ 非空, 存在 $x_0^*\in X^*$ 使得

$$f^*(x_0^*) = \sup_{x\in X}(<x_0^*,x>-f(x)) \le <x_0^*,x_0>-f(x_0)<\infty,$$

因此 $f^*(x_0^*)\not\equiv\infty$.

✍ **题目2.4.16.** 设 X 是 Banach 空间, $x(t):[a,b]\to X$ 是连续的抽象函数. 又设 Δ 表示 $[a,b]$ 的分割:

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

$$\|\Delta\|\triangleq\max_{0\le i<n}(t_{i+1}-t_i).$$

求证: 在 X 中存在极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

此极限称为抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分.

解答. 称所有满足

$$x(t)=\alpha_i,\quad t\in(t_i,t_{i+1}),0\le i<n$$

的函数为阶梯型函数, 其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}\in X$, 所有阶梯型函数组成的空间记为 Y_0, 其上定义线性泛函

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t_{i+1}-t_i).$$

注意到

$$b-a=\left\|F(\chi_{[a,b]})\right\|\le\sup_{x\in Y_0,\|x\|=1}\|F(x)\|\le\sum_{i=0}^{n-1}\|x\|(t_{i+1}-t_i)=b-a,$$

因此 $\|F\|_{Y_0}=b-a$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 Y(Y_0 的完备化空间) 上的连续线性泛函, 仍记为 F, 满足 $\|F\|=b-a$. 由于任意连续函数 x 均是阶梯型函数一致收敛的极限, 故 $C([a,b],X)\subset Y$. 并且由 F 的连续性,

$$F(x)=\lim_{\|\Delta\|\to 0}F\left(\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)\chi_{(t_i,t_{i+1})}\right)=\lim_{\|\Delta\|\to 0}x(t_i)(t_{i+1}-t_i),$$

故右侧极限存在.

✍ **题目2.4.17.** 设 X 是 Banach 空间, G 是 $\mathbb{C}$ 中的简单闭曲线 L 围成的开区域. 如果 $x(z):\overline{G}\to X$ 在 G 内解析, 且在 $\overline{G}$ 上连续. 求证: (推广的 Cauchy 定理)

$$\int_L x(z)\mathrm{d}z=0.$$

解答. 任取 $f\in X^*$, 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x(z+h))-f(x(z))-f(x'(z))h}{h}$$

$$=f\left(\lim_{h\to 0}\frac{x(z+h)-x(z)-x'(z)h}{h}\right)=0,\quad \forall z\in G,$$

故 $f(x(z))$ 也在 G 内解析. 由 Cauchy 定理,

$$f\left(\int_L x(z)\mathrm{d}z\right)=\int_L f(x(z))\mathrm{d}z=0,\quad \forall f\in X^*,$$

因此 $\int_L x(z)\mathrm{d}z=0$.

✍ **题目2.4.18.** 求证: (1) $|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 中是凸的; (2) $\partial|x|(0)=[-1,1]$.

解答. (1) $\left|\alpha x+(1-\alpha)y\right|\le\alpha|x|+(1-\alpha)\left|y\right|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R},\alpha\in[0,1]$.

(2) $\partial|x|(0)=\{t\in\mathbb{R}: tx\le|x|,\forall x\in\mathbb{R}\}=[-1,1]$.

B.2.5 共轭空间, 弱收敛, 自反空间

✍ **题目2.5.1.** 求证: $(l^p)^*=l^q\left(1\le p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

解答. 令

$$T:l^q\to(l^p)^*,\{\alpha_n\}\mapsto f\quad\left(f(\{x_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right),$$

由习题 2.3.8 和习题 2.3.9, T 是良定义的并且保持范数. 还需证明 T 是满射. 设 $f\in l^q$, 令 $\{\alpha_n\}=\{f(e_n)\}$, 其中 e_n 是第 n 分量为 1 其余为 0 的点. $\forall\{x_n\}\in l^p$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n=f(\{x_n\})$ 收敛, 因此再由习题 2.3.8 和习题 2.3.9, $\{\alpha_n\}\in l^q$ 且 $T\{\alpha_n\}=f$, T 是满射.

✍ **题目2.5.2.** 设 C 是收敛数列全体, 其上范数为 $\|\cdot\|_\infty$, 求证: $C^*=l^1$.

解答. 令

$$T:l^1\to C^*,\alpha=\{\alpha_n\}\to f\quad\left(f(\{x_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right).$$

首先证明 T 是良定义的, 并且 $\|f\|=\|\alpha\|_1$. 注意到

$$\left|f(x)\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right|\le\|x\|_\infty\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=\|\alpha\|_1\cdot\|x\|_\infty,\quad\forall x=\{x_n\}\in C,$$

因此 $\|f\| \le \|\alpha\|_1$. 记

$$x^{(m)} \in C_0 \subset C: \quad x_n^{(m)} = \begin{cases} \operatorname{sign}(\alpha_n), & n \le m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

则

$$f(x^{(m)}) = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n| \to \|\alpha\|_1, \quad m \to \infty,$$

因此 $\|f\| = \|\alpha\|_1$.

再证明 T 是满射. 对 $f \in C^*$, 令 $\alpha = \{\alpha_n\} = \{f(e^{(n)})\}$. 下面证明 $\alpha \in l^1$.

$$\left|f(x^{(m)})\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(m)} f(e^{(n)})\right| = \sum_{n=1}^{m} \left|f(e^{(n)})\right| = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n| \le \|f\| \cdot \|x^{(m)}\| = \|f\|,$$

故 $\alpha \in l^1$, 再根据 $T\alpha = f$ 知 T 是满射.

✍ **题目2.5.3.** 设 C_0 是收敛于 0 的数列全体, 其上范数为 $\|\cdot\|_\infty$, 求证: $C_0^* = l^1$.

解答. 与上题证明过程相同.

✍ **题目2.5.4.** 求证: 有限维赋范空间是自反的.

解答. 设 X 的一组基为 $x_1, \cdots, x_n$. 由习题 2.4.7, 存在 $f_1, \cdots, f_n \in X^*$ 使得 $f_i(x_j) = \delta_{ij} (1 \le i, j \le n)$. 任取 $f \in X^*, x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, 有

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, x_k \rangle f_k(x),$$

并且由于 $f_k (1 \le k \le n)$ 线性无关, 这种表示是唯一的, 因此 $f_1, \cdots, f_n$ 是 X^* 的一组基, $\dim X^* = n = \dim X$.

同理可得 $\dim X^{**} = \dim X^*$, 从而 $\dim X^{**} = \dim X$, 再由 $X \subset X^{**}$ 知 $X = X^{**}$.

✍ **题目2.5.5.** 求证: Banach 空间 X 自反当且仅当 X^* 自反.

解答. 必要性: 若 X 自反, 则自然映射 τ 是从 X 到 X^{**} 的等距同构. $\forall x^{***} \in X^{***}$, 对

$\forall x^{**} = \tau x \in X^{**}$, 有

$$\begin{aligned}\langle x^{***}, x^{**}\rangle &= \langle x^{***}, \tau x\rangle = \langle \tau^* x^{***}, x\rangle \\ &= \langle \tau x, \tau^* x^{***}\rangle = \langle x^{**}, \tau^* x^{***}\rangle,\end{aligned}$$

因此 X^* 是自反的.

充分性: 若 X^* 自反, 则由必要性条件知 X^{**} 自反. 记 τ 是 X 到 X^{**} 的自然同构, 则由 X 是 Banach 空间可得 $\tau(X)$ 在 X^{**} 中闭. 根据 Pettis 定理, 自反空间的闭子空间也自反, 因此 τX 自反. 记 ϕ 是从 τX 到 $(\tau X)^{**}$ 的自然同构 (因为 τX 自反). 不难看出 $x^* \mapsto y^*$, $\langle y^*, \tau x\rangle := \langle x^*, x\rangle (x \in X)$ 是 X^* 到 $(\tau X)^*$ 的等距同构, 从而 $\psi : x^{**} \mapsto y^{**}, \langle y^{**}, y^*\rangle := \langle x^{**}, x^*\rangle (x^* \in X^*)$ 是从 X^{**} 到 $(\tau X)^{**}$ 的等距同构. 故

$$\begin{aligned}\langle x^{**}, x^*\rangle &= \langle y^{**}, y^*\rangle = \langle y^*, \phi^{-1} y^{**}\rangle \\ &= \langle x^*, \tau^{-1}\phi^{-1} y^{**}\rangle = \langle x^*, \tau^{-1}\phi^{-1}\psi x^{**}\rangle,\end{aligned}$$

因此 X 也自反.

✍ **题目2.5.6.** 设 X 是赋范空间, τ 是 X 到 X^{**} 的自然映射, 求证: $R(\tau)$ 是闭的当且仅当 X 完备.

解答. 必要性: 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 则 $\{\tau x_n\}$ 是 X^{**} 中的 Cauchy 列. 由 X^{**} 的完备性以及 $R(\tau)$ 是闭集, $\tau x_n \to \tau x \in R(\tau)$, 从而 $x_n \to x$, X 完备.

充分性: 设 $\tau x_n \to x^{**} \in X^{**}$, 则 $\{\tau x_n\}$ 是 X^{**} 中的 Cauchy 列, $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 根据 X 的完备性, $x_n \to x \in X$, 也即 $\tau x_n \to \tau x = x^{**} \in R(\tau)$, 因此 $R(\tau)$ 是闭的.

✍ **题目2.5.7.** 在 l^1 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots),$$

求证: $T \in L(l^1)$ 并求 T^*.

解答. 由

$$\|Tx\| = \|x\|, \quad \forall x \in l^1$$

可知 $T \in L(l^1)$ 并且 $\|T\| = 1$. 注意到

$$\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (Tx)_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} x_n, \quad \forall f \in l^\infty = (l^1)^*, x \in l^1,$$

故

$$T^* : l^\infty \to l^\infty, (f_1, f_2, \cdots) \mapsto (f_2, f_3, \cdots),$$

也即 T^* 是 l^∞ 上的左推移算子.

✍ **题目2.5.8.** 在 l^2 中定义算子

$$T : \{x_n\}_1^\infty \mapsto \left\{\frac{x_n}{n}\right\}_1^\infty,$$

求证: $T \in L(l^2)$ 并求 T^*.

解答. 由

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right) = \zeta(2)\|x\|, \quad \forall x \in l^2$$

可知 $T \in L(l^2)$ 并且 $\|T\| = \zeta(2)$. 注意到

$$(T^* x, y) = (x, Ty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n} = (Tx, y), \quad \forall x, y \in l^2$$

可得 $T^* = T$.

✍ **题目2.5.9.** 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$ 并满足

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H,$$

求证: (1) $A^* = A$; (2) $\overline{R(A)} = H \implies A$ 是单射.

解答. (1) 由 Rieze 表示定理, $H \cong H^*$, 再由

$$(A^* x, y) = (x, Ay) = (Ax, y), \quad \forall x, y \in H$$

可得 $A^* = A$.

(2) 若 $Ax = Ay$, 则

$$0 = (Ax - Ay, z) = (x - y, Az), \quad \forall z \in H.$$

由 $\overline{R(A)} = H$ 知, 存在 $Az_n \to x - y$, 故

$$0 = (x - y, Az_n) \to (x - y, x - y) = 0 \implies x = y.$$

因此 A 是单射.

✍ **题目2.5.10.** 设 X, Y 是赋范空间, $A \in L(X, Y)$, A^{-1} 存在且 $A^{-1} \in L(Y, X)$, 求证:

(1) $(A^*)^{-1}$ 存在且 $(A^*)^{-1} \in L(X^*, Y^*)$;

(2) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

解答. (1) 设 $A^* f = A^* g$, 则

$$0 = \langle A^* f - A^* g, A^{-1} y\rangle = \langle f - g, AA^{-1} y\rangle = \langle f - g, y\rangle (\forall y \in Y) \implies f = g.$$

因此 A^* 是单射. 任取 $x^* \in X^*$, 取 $y^* = (A^{-1})^* x^*$, 则

$$\langle A^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, A^{-1} Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle, \quad \forall x \in X,$$

故 $A^* y = x$, A^* 是满射. 再根据 Banach 逆算子定理, $(A^*)^{-1} \in L(X^*, Y^*)$.

(2) 由 (1) 证明 A^* 是满射的过程不难看出.

✍ **题目2.5.11.** 设 X, Y, Z 是赋范空间, $B \in L(X, Y), A \in L(Y, Z)$, 求证: $(AB)^* = B^* A^*$.

解答.

$$\langle (AB)^* z^*, x\rangle = \langle z^*, ABx\rangle = \langle A^* z^*, Bx\rangle = \langle B^* A^* z^*, x\rangle, \quad \forall z^* \in Z^*, x \in X,$$

故 $(AB)^* = B^* A^*$.

✍ **题目2.5.12.** 设 X, Y 是 Banach 空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 并且 $\forall g \in Y^*$,

$g(Tx) \in X^*$, 求证: $T \in L(X,Y)$.

解答. 定义 $T^* : Y^* \to X^*, g \mapsto g(Tx)$, 则

$$\sup_{\substack{x^{**} \in R(\tau) \\ \|x^{**}\|=1}} \left\|(x^{**} \circ T^*) g\right\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \left\|(T^* g)(x)\right\| < \infty, \quad \forall g \in Y^*,$$

由共鸣定理,

$$\sup_{\substack{x^{**} \in R(\tau) \\ \|x^{**}\|=1}} \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \|g\|=1}} \left\|(x^{**} \circ T^*)(g)\right\| = \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in Y^*}} \left\|T^* g\right\| = \left\|T^*\right\| < \infty,$$

故 $T^* \in L(Y^*, X^*)$, 从而 $\|T\| = \|T^*\| < \infty$, $T \in L(X,Y)$.

✍ **题目2.5.13.** 设 $x_n, x \in C[a,b]$ 且 $x_n \rightharpoonup x$, 求证

$$x_n(t) \to x(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

解答. $\forall t \in [a,b]$, 取 $f_t(y) = y(t) (\forall y \in C[a,b]$, 则

$$\left|f_t(y)\right| = \left|y(t)\right| \le \left\|y\right\|, \quad \forall y \in C[a,b],$$

故 $f_t \in (C[a,b])^*$, 从而

$$f_t(x_n) = x_n(t) \to f_t(x) = x(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

✍ **题目2.5.14.** 设在赋范空间 X 中 $x_n \rightharpoonup x_0$, 求证:

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \ge \|x_0\|.$$

解答. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\left\|f\right\| = 1$, 故

$$\|x_0\| = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

✍ **题目2.5.15.** 设 H 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 的正交规范基, 求证: $x_n \rightharpoonup x_0$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\|$ 有界;

(2) $(x_n, e_k) \to (x_0, e_k), \quad \forall k \geq 1$.

解答. 必要性: 由 Banach-Steinhaus 定理易得.

充分性: 由 Riesz 表示定理, 只需证明 $(x_n, x) \to (x_0, x)(\forall x \in H)$. 记 M 是 $\|x_n\|$ 的一个上界.$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得

$$\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2} = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} (x, e_k) e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{M + \|x_0\|}.$$

从而

$$\begin{aligned}
|(x_n - x_0, x)| &\leq \left| \left(x_n - x_0, \sum_{k=1}^{N} (x, e_k) e_k \right) \right| + \left| \left(x_n - x_0, \sum_{k=N+1}^{\infty} (x, e_k) e_k \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} |(x, e_k)| \cdot |(x_n - x_0, e_k)| + (M + \|x_0\|) \cdot \frac{\varepsilon}{M + \|x_0\|} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} |(x, e_k)| \cdot |(x_n - x_0, e_k)| + \varepsilon,
\end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$, 再由 ε 的任意性可知, $(x_n - x_0, x) \to 0$.

✍ **题目2.5.16.** 设 S_n 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到自身的算子 $(1 \leq p < \infty)$:

$$(S_n u)(x) = \begin{cases} u(x), & |x| \leq n, \\ 0, & |x| > n, \end{cases}$$

求证: $S_n \to I$ 但 $S_n \rightrightarrows\!\!\!\!\!/\; I$.

解答. 任取 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|(I - S_n) u\|^p = \int_{|x| > n} |u(x)|^p \mathrm{d}x \to 0,$$

因此 $S_n \to I$. 但

$$\|I-S_n\| = \sup_{\|u\|=1}\left(\int_{|x|>n}|u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1,$$

对 $v=\chi_{n<|x|<2n}$, 取 $u=\frac{v}{\|v\|}$ 带入上式, 得 $\|I-S_n\|=1$, 故 $S_n \nRightarrow I$.

✍ **题目2.5.17.** 设 H 是 Hilbert 空间, $x_n \rightharpoonup x_0, y_n \to y_0$, 求证: $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

解答. 设 M 是 $\|x_n\|$ 的上界, 则

$$\begin{aligned}\left|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)\right| \leq & \left|(x_n,y_n-y_0)\right| + \left|(x_n-x_0,y_0)\right| \\ \leq & M\left\|y_n-y_0\right\| + \left|(x_n-x_0,y_0)\right|,\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即可.

✍ **题目2.5.18.** 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正交规范集, 求证: $e_n \rightharpoonup 0$ 但 $e_n \not\to 0$.

解答. 由 Bessel 不等式, $(e_n,x)\to 0(\forall x\in H)$, 再由 Riesz 表示定理, $e_n \rightharpoonup 0$. 但 $\|e_n\|=1(\forall n)$, 故 $e_n \not\to 0$.

✍ **题目2.5.19.** 设 H 是 Hilbert 空间, 求证 $x_n \to x$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\|\to\|x\|$;

(2) $x_n \rightharpoonup x$.

解答. 必要性显然, 只需证明充分性. 注意到

$$(x_n-x,x_n-x)=(x_n,x_n)-2\operatorname{Re}(x_n-x,x)-(x,x),$$

令 $n\to\infty$ 即可.

✍ **题目2.5.20.** 求证: 在自反的 Banach 空间中, 集合的弱列紧性和有界性等价.

解答. 由 Eberlein-Smulian 定理, 自反空间中的有界集是弱列紧的, 还需证明弱列紧集有界. 设 A 是自反 Banach 空间 X 中的弱列紧集. 反设 A 无界, 则存在 $\{x_n\}\subset A$ 并且 $\|x_n\|\geq n(\forall n\geq 1)$. 由于 A 是弱列紧的, $\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 从而该子列有界, 矛盾.

✍ **题目2.5.21.** 求证: 赋范空间中的闭凸集是弱闭的, 即若 M 是闭凸集, $\{x_n\}\subset M$ 且 $x_n \rightharpoonup x_0$, 则 $x_0\in M$.

解答. 若 $x_n \rightharpoonup x_0$, 由 Mazur 定理, 存在 $\{x_n\}$ 的凸组合序列 $\{y_n\}$ 强收敛与 x_0, 而由 M 是闭集, $\{y_n\}\subset M$, 因此由 M 是闭集, $x_0\in M$.

✍ **题目2.5.22.** 设 X 是自反的 Banach 空间, M 是 X 中的有界闭凸集, $f\in X^*$, 求证: f 在 M 上达到最大值和最小值.

解答. 设 $\|x\|\le K(\forall x\in M)$, 则由

$$\left|f(x)\right|\le\left\|f\right\|\cdot\|x\|\le K\left\|f\right\|,\quad \forall x\in M$$

知 f 在 M 上的上确界和下确界均是有限值. 设 $x_n\in M$ 使得 $f(x_n)\to\alpha=\sup\limits_{x\in M}f(x)$, 由题目 2.5.20, $\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记弱极限为 x, 显然 $f(x)=\alpha$. 根据题目 2.5.21, $x\in M$, 因此 f 在 M 上能达到最大值, 同理也能达到最小值.

✍ **题目2.5.23.** 设 X 是自反的 Banach 空间, M 是 X 中的非空闭凸集, 求证: 存在 $x_0\in M$ 使得 $\|x_0\|=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$.

解答. 记 $d=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$, 任取 $y\in M$, 有 $\left\|y\right\|\ge d$. 令 $N=M\cap\overline{B}(0,\left\|y\right\|)$, 则 N 是有界闭凸集, 并且 $\inf\limits_{x\in N}\|x\|=d$. 取 $x_n\in N$ 使得 $\|x_n\|\to d$, 则由题目 2.5.20, $\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 弱极限为 x_0. 取 $f\in X^*$ 使得 $\left\|f\right\|=1$ 且 $f(x_0)=\|x_0\|$, 则

$$\|x_0\|=f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\le\lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k}\right\|=d.$$

由题目 2.5.21, $x_0\in N\subset M$, 因此还有 $\|x_0\|\ge d$, 故 $\|x_0\|=d$.

B.2.6　线性算子的谱

✍ **题目2.6.1.** 设 X 是 Banach 空间, 求证: 可逆有界线性算子全体在 $L(X)$ 是开集.

证明. 设 $A\in L(X)$ 可逆. 则

$$B=A(I-A^{-1}(A-B)),$$

当 $\|B-A\|<\left\|A^{-1}\right\|^{-1}$ 时, B 也可逆. □

✍ **题目2.6.2.** 设 A 是闭线性算子, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\sigma_p(A)$ 两两互异, x_i 是对应于 λ_i 的特征元. 求证: $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关.

解答. 若 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k=0$, 则分别左乘 $I,A,A^2,\cdots,A^{n-1}$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j(\alpha_i x_i)=0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

上述线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异, 上述行列式非零, 故 $\alpha_i x_i=0(i=1,2,\cdots,n)\implies\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0\implies x_1,\cdots,x_n$ 线性无关.

✍ **题目2.6.3.** 在双边 $l^2(\mathbb{Z})$ 空间 (从 $-\infty$ 到 ∞) 上, 考察右推移算子

$$A:x\mapsto Ax,\quad (Ax)_n=x_{n-1}(\forall n\in\mathbb{Z}).$$

求证: $\sigma_c(A)=\sigma(A)=$ 单位圆周.

解答. 显然 $\|A\|=1$, 故当 $|\lambda|>1$ 时 $\lambda\in\rho(A)$. 并且 $\left\|A^{-1}\right\|=1$, $0<|\lambda|<1$ 时 $\frac{1}{\lambda}\in\rho(A^{-1})$, 从而由 $\lambda I-A=-\lambda(\lambda^{-1}I-A^{-1})A$ 知此时 $\lambda\in\rho(A)$.

当 $|\lambda|=1$ 时, 若 $x\neq 0$ 但 $Ax=\lambda x$, 设 $x_m\neq 0$, 则

$$x_{n-1}=\lambda x_n(\forall n\in\mathbb{Z})\implies x_{m-n}=\lambda^n x_m(\forall n\in\mathbb{Z})\implies\|x\|=\infty,$$

矛盾. 因此 λ 不是特征值. 由于 $l^2(\mathbb{Z})$ 是 Hilbert 空间, 要证明 $\overline{R(\lambda I-A)}=l^2$ 只需证 $R(\lambda I-A)^{\perp}=\{0\}$. 为此, 只需注意到

$$\begin{aligned} x\in R(\lambda I-A)^{\perp} &\iff (x,(\lambda I-A)y)=0(\forall y\in l^2(\mathbb{Z})) \\ &\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n(\overline{\lambda}\overline{y}_n-\overline{y}_{n-1})=0(\forall y\in l^2(\mathbb{Z})) \end{aligned}$$

$$\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\overline{\lambda}x_n - x_{n+1})\overline{y}_n = 0(\forall y \in l^2(\mathbb{Z}))$$

$$\iff ((\overline{\lambda}I - A^{-1})x, y) = 0(\forall y \in l^2(\mathbb{Z}))$$

$$\iff (\overline{\lambda}I - A^{-1})x = -\overline{\lambda}^{-1}A^{-1}(\overline{\lambda}I - A)x = 0$$

$$\iff (\overline{\lambda}I - A)x = 0 \iff x = 0.$$

✍ **题目2.6.4.** 在 l^2 上考察左推移算子

$$A:(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_2, x_3, \cdots).$$

求证: $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, 并且

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A).$$

解答. 显然 $\|A\| = 1$, 故当 $|\lambda| > 1$ 时 $\lambda \in \rho(A)$.

当 $|\lambda| < 1$ 时, $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$ 是关于 λ 的特征值, 因此 $\lambda \in \sigma_p(A)$.

当 $|\lambda| = 1$ 时, 若 $Ax = \lambda x$, 则

$$x_{n+1} = \lambda x_n(\forall n \geq 1) \implies x_n = \lambda^{n-1}x_1(\forall n \geq 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty}|x_1| < \infty \implies x = 0.$$

因此 λ 不是特征值. 此外,

$$x \in R(\lambda I - A)^{\perp} \iff (x, (\lambda I - A)y) = 0(\forall y \in l^2)$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\overline{\lambda}\overline{y}_n - \overline{y}_{n+1}) = 0(\forall y \in l^2)$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\lambda}x_n - x_{n-1})\overline{y}_n = 0(\text{其中} x_0 = 0, \forall y_n \in l^2),$$

在上式中令 $y_n = \overline{\lambda}x_n - x_{n-1}(\forall n \geq 1)$, 则 $\overline{\lambda}x_n = x_{n-1}(\forall n \geq 1)$, 从而 $x_n = \overline{\lambda}^{1-n}x_1$, 由 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_1|$ 知 $x = 0$, 从而 $R(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\}$, $\overline{R(\lambda I - A)} = l^2$, $\lambda \in \sigma_c(A)$.

B.3 紧算子与 Fredholm 算子

B.3.1 紧算子的定义和基本性质

✍ **题目3.1.1.** 设 X 是无穷维 Banach 空间, 求证: 若 $A\in\mathfrak{C}(X)$, 则 A 没有有界逆.

解答. 反设 A 存在有界逆, 则由 $A(B_1)$ 是列紧的, $B_1=A^{-1}A(B_1)$ 也是列紧的, 但无穷维空间中的单位球不可能列紧, 矛盾.

✍ **题目3.1.2.** 设 X 是 Banach 空间, $A\in L(X)$ 满足

$$\|Ax\|\geq\alpha\|x\|,\quad\forall x\in X,$$

其中 α 是正常数. 求证: $A\in\mathfrak{C}(X)$ 的充要条件是 X 是有限维的.

解答. 充分性显然, 只证必要性. 若 $A\in\mathfrak{C}(X)$, 则任取 $\{x_n\}\subset B_1$, $\{Ax_n\}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}$, 故

$$\left\|x_{n_k}-x_{n_s}\right\|\leq\frac{1}{\alpha}\left\|Ax_{n_k}-Ax_{n_s}\right\|,\quad\forall k,s\geq1,$$

因此 $\{x_{n_k}\}$ 是基本列, 从而收敛. 故 B_1 是列紧的, X 是有限维空间.

✍ **题目3.1.3.** 设 X,Y 是 Banach 空间, $A\in L(X,Y),K\in\mathfrak{C}(X,Y)$ 满足 $R(A)\subset R(K)$. 求证: $A\in\mathfrak{C}(X,Y)$.

解答. 令

$$\tilde{K}:X/N(K)\to R(K),x+N(K)\mapsto K(x),$$

由于 $B_1+N(K)$ 是 $X/N(K)$ 中的单位球, 因此由 $\tilde{K}(B_1+N(K))=K(B_1)$ 列紧知 $\tilde{K}\in\mathfrak{C}(X/N(K),Y)$. 由 $\tilde{K}$ 是单射及 $R(A)\subset R(K)$, 可以定义线性算子

$$T=\tilde{K}^{-1}A:X\to X/N(K).$$

因为 $\tilde{K}$ 是单射且是闭算子, 故 $\tilde{K}^{-1}$ 是闭算子, 从而 T 也是闭算子, 而 X 完备, 因此由闭图像定理, T 是连续线性算子, 故 $A=\tilde{K}T$ 是紧算子.

✍ **题目3.1.4.** 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathfrak{C}(H), x_n \rightharpoonup x_0, y_n \rightharpoonup y_0$. 求证:

$$(x_n, Ay_n) \to (x_0, Ay_0).$$

解答. 由于紧算子都是全连续的, 故 $Ay_n \to Ay_0$, 从而

$$\begin{aligned}\left|(x_n, Ay_n) - (x_0, Ay_0)\right| &\le \left|(x_n, Ay_n - Ay_0)\right| + \left|(x_n - x_0, Ay_0)\right| \\ &\le \sup_{n\ge 1}\|x_n\| \cdot \left\|Ay_n - Ay_0\right\| + \left|(x_n - x_0, Ay_0)\right| \to 0.\end{aligned}$$

✍ **题目3.1.5.** 设 X, Y 是 Banach 空间, $A \in L(X,Y)$. 若 $R(A)$ 闭且是无穷维的, 求证: $A \notin \mathfrak{C}(X,Y)$.

解答. 反设 $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 则

$$\tilde{A}: X/N(A) \to R(A), x + N(A) \to Ax$$

是从 $X/N(A)$ 到 $R(A)$ 的具有有界逆的紧算子. 记 U 是 $R(A)$ 中的单位球, 则 $\tilde{A}^{-1}U$ 在 $X/N(A)$ 中有界, 从而 $U = \tilde{A}\tilde{A}^{-1}U$ 列紧, 与 $R(A)$ 是无穷维的矛盾.

✍ **题目3.1.6.** 设 $\omega_n \in \mathbb{K}, \omega_n \to 0$, 求证: 映射

$$T: \{\xi_n\} \mapsto \{\omega_n \xi_n\} \quad (\forall \xi = \{\xi_n\} \in l^p)$$

是 l^p 上的紧算子, 其中 $1 \le p < \infty$.

解答. 首先, 显然有 $T \in L(l^p)$ 并且 $\|T\| \le \sup\limits_{n\ge 1}|\omega_n|$. 令 $F_n: x \mapsto (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$. 由于 $R(F_n) = n$, 故 $F_n \in \mathfrak{C}(l^p) \implies F_n T \in \mathfrak{C}(l^p)$. 注意到

$$\|T - F_n T\|^p = \sup_{\|x\|=1}\|Tx - F_n Tx\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty}|\omega_k x_k|^p \le \sup_{k>n}|\omega_k|^p \cdot \|x\|^p = \sup_{k>n}|\omega_k|^p \to 0,$$

因此 $F_n T \rightrightarrows T$, 由于 $\mathfrak{C}(l^p)$ 在 $L(l^p)$ 中闭, $T \in \mathfrak{C}(l^p)$.

✍ **题目3.1.7.** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集, f 是 Ω 上的有界可测函数. 求证: $F: x(t) \mapsto f(t)x(t)$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的紧算子的充要条件为: $f = 0$ a.e.

解答. 充分性显然, 只证必要性. 设 $F(x_n)\to y$. 令 $x=f^{-1}\chi_{\{f\neq 0\}}$, 则 $F(x_n)\to F(x) \implies F(x)=y$, 从而 $R(F)$ 是闭集. 由本节第五题, 因此 $R(F)$ 是闭的, 则由 F 是紧算子可知 $R(F)$ 是有限维的, 因此必有 $f=0$.

✍ **题目3.1.8.** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$, 求证:

$$A: u(x)\mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y \quad (\forall u\in L^2(\Omega))$$

是 $L^2(\Omega)$ 上的紧算子.

解答. 设 K_n 是 $L^2(\Omega\times\Omega)$ 上的依范数收敛于 K 的简单函数, 并且每个取值集合均为 $E\times F$ 的形式, 其中 $E,F\subset\Omega$. 令

$$A_n: u(x)\mapsto \int_\Omega K_n(x,y)u(y)\mathrm{d}y,$$

由于 A_n 的值域是有限维的, 每个 A_n 都是紧算子. 此外,

$$\|A-A_n\|\le \|K-K_n\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\to 0.$$

因为紧算子在有界算子中闭, 因此由 A 也是紧算子.

✍ **题目3.1.9.** 设 H 是 Hilbert 空间, $A\in\mathfrak{C}(H)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交规范集, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}(Ae_n,e_n)=0$.

解答. 由 Bessel 不等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\le\|x\|^2 \implies (x,e_n)\to 0,\quad \forall x\in H.$$

因此 $e_n\rightharpoonup 0$, 从而 $Ae_n\to 0$. 而 e_n 是有界的, 因此 $(Ae_n,e_n)\to 0$.

✍ **题目3.1.10.** 设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathfrak{C}(X)$, X_0 是 X 的闭子空间满足 $A(X_0)\subset X_0$. 求证: 映射

$$T:[x]\mapsto[Ax]$$

是商空间 X/X_0 上的紧算子.

解答. 显然 $B_1 + X_0$ 是 X/X_0 上的单位球. 任取 $\|x_n\| \le 1$, 只需证明 $\{[Ax_n]\}$ 有收敛子列. 取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $Ax_{n_k} \to y \in X$. 则

$$\big\|[Ax_n] - [y]\big\| \le \big\|Ax_n - y\big\| \to 0,$$

因此 $[Ax_{n_k}] \to [y]$.

✍ **题目3.1.11**. 设 X, Y, Z 是 Banach 空间, $X \subset Y \subset Z$. 若 $X \to Y$ 的嵌入映射是紧的, $Y \to Z$ 的嵌入映射是连续的. 求证: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $c = c(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\|x\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X + c\|x\|_Z, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \ge 1.$$

解答. 反设存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\{x_n\} \subset X$ 使得

$$\|x_n\|_Y > \varepsilon_0 \|x_n\|_X + n\|x_n\|_Z.$$

不妨设 $\|x_n\|_X = 1$. 由于从 X 到 Y 的嵌入映射是紧的, 故存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $y \in Y$ 使得

$$\big\|x_{n_k} - y\big\|_Y \to 0,$$

再由 Y 到 Z 的嵌入是连续的可得 $\big\|x_{n_k} - y\big\|_Z \to 0$. 由于紧映射是连续的, 故存在 $M > 0$ 使得

$$M \ge \|x_n\|_Y > \varepsilon_0 + n\|x_n\|_Z \implies \|x_n\|_Z \le \frac{M}{n} \to 0.$$

故由极限的唯一性有 $y = 0$, 但 $\big\|y\big\| = \lim\limits_{k\to\infty} \big\|x_{n_k}\big\|_Y \ge \varepsilon_0 > 0$, 矛盾.

B.3.2 Riesz-Fredholm 理论

✍ **题目3.2.1**. 设 X 是 Banach 空间, M 是 X 的闭子空间并且 $\mathrm{codim} M = n$. 求证: 存在线性无关的 $\{\varphi_k\}_1^n \subset X^*$ 使得

$$M = \bigcap_{k=1}^{n} N(\varphi_k).$$

解答. 记 $\mathrm{span}\{x_k+M\}_1^n = X/M$, 则任取 $x\in X$, 存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ 使得

$$x+M=\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k + M \implies x-\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in M,$$

再由 $x_k\notin M(1\le k\le n)$ 知

$$X=\mathrm{span}\{x_k\}_1^n\oplus M.$$

由 Hahn-Banach 定理, 存在 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in X^*$ 使得

$$\varphi_i(x_j)=\delta_{ij} \quad 且 \quad \varphi_i\big|_M=0, \quad i,j=1,\cdots,n.$$

根据上式不难得出 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 线性无关. 从而

$$x=\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k + y\in\bigcap_{k=1}^n N(\varphi_k) \iff \varphi_k(x)=0(1\le k\le n)$$

$$\iff \lambda_k=0(1\le k\le n) \iff x=y\in M.$$

✍ **题目3.2.2.** 设 X,Y 是 Banach 空间, $T\in L(X,Y)$ 是满射. 定义

$$\tilde{T}: X/N(T)\to Y, [x]\mapsto Tx.$$

求证: $\tilde{T}$ 是线性同胚映射.

解答. 任取 $x\in X$, 存在 $y\in[x]$ 使得 $\|[x]\|\ge\frac{1}{2}\|y\|$, 从而

$$\left\|\tilde{T}[x]\right\|=\|Tx\|\le\|Tx\|=\left\|Ty\right\|\le\|T\|\cdot\left\|y\right\|\le 2\|T\|\cdot\|[x]\|,$$

因此 $\tilde{T}\in L(X/N(T)\to Y)$. 由于 T 是满射, 因此 $\tilde{T}$ 是双射, 由 Banach 逆算子定理, $\tilde{T}^{-1}\in L(Y,X/N(T))$.

✍ **题目3.2.3.** 设 X 是 Banach 空间, M,N_1,N_2 是 X 的闭子空间, 如果

$$M\oplus N_1=X=M\oplus N_2,$$

求证: N_1 和 N_2 同胚.

解答. 令

$$T_i : X/M = (M \oplus N_i)/M \to N_i, m + n_i + M \mapsto n_i,$$

不难证明 T_i 是从 X/M 到 N_i 的同胚 ($i = 1, 2$), 因此 N_1 和 N_2 也同胚.

✍ **题目3.2.4.** 设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$, 求证:

(1) $\forall [x] \in X/N(T)$, 存在 $x_0 \in [x]$ 使得 $\|x_0\| = \|[x]\|$.

(2) 若 $y \in X$ 使得 $Tx = y$ 有解, 则其中必有一个解达到范数最小.

解答. (1) 只需证明存在 $y \in N(T)$ 使得 $\|x - y\| = \rho(x, N(T))$. 取 $y_n \in N(T)$ 使得

$$\rho(x, N(T)) \le \|x - y_n\| \le \rho(x, N(T)) + \frac{1}{n}.$$

由上式, $\{y_n\}$ 是有界列, 因此存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 使得 $Ay_{n_k} \to y$, 而由 $y_{n_k} \in N(T)$, $y_{n_k} = Ay_{n_k} \to y \in N(T)$, y 显然满足条件.

(2) 显然与 (1) 等价.

✍ **题目3.2.5.** 设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$, 求证: $N(T^k)$ 是有限维的, 并且 $R(T^k)$ 是闭的 ($\forall k \ge 1$).

解答. 由

$$I - T^k = I - (I - A)^k = I - \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} (-1)^i A^i = A\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} (-1)^{i-1} A^{i-1}\right)$$

知 $I - T^k \in \mathfrak{C}(X)$, 再由 Riesz-Fredholm 定理易得.

✍ **题目3.2.6.** 设 M 是 Banach 空间 X 的闭子空间. 称满足 $P^2 = P$ 的由 X 到 M 上的一个有界线性算子 P 为由 X 到 M 上的投影算子. 求证:

(1) 若 M 是 X 的有限维子空间, 则必存在从 X 到 M 上的投影算子.

(2) 若 P 是由 X 到 M 上的投影算子, 则 $I - P$ 是由 X 到 $R(I - P)$ 上的投影算子.

(3) 若 P 是由 X 到 M 上的投影算子, 则 $X = M \oplus N$, 其中 $N = R(I - P)$.

解答. (1) 取 P 为将 x 映为 x 在 M 上的最佳逼近元的映射即可.

(2) 只需注意到 $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$.

(3) 一方面, $x - Px = (I - P)x \in N \implies X = M + N$. 另一方面, 若 $(I - P)x \in M$, 而

$Px \in M$, 因此 $x \in M$, 故 $x = Px, (I-P)x = 0$, 因此 $X = M \oplus N$.

B.3.3 紧算子的谱理论

(本节习题中的 X 均指 Banach 空间)

✍ **题目3.3.1.** 给定数列 $\{a_n\}$, 在 l^1 上定义算子 A 如下:

$$A(x_1, x_2, \cdots) = (a_1x_1, a_2x_2, \cdots), \quad \forall x = \{x_n\} \in l^1.$$

求证:

(1) $A \in L(l^1) \iff \sup\limits_{n\geq 1}|a_n| < \infty$.

(2) $A^{-1} \in L(l^1) \iff \inf\limits_{n\geq 1}|a_n| > 0$.

(3) $A \in \mathfrak{C}(l^1) \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解答. (1) 只需证明 $\|A\| = \sup\limits_{n\geq 1}|a_n| < \infty$. 一方面,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx_n| \leq \sup_{n\geq 1}|a_n|.$$

另一方面, 若记 $e^{(k)}$ 是第 k 项为 1, 其余为 0 的数列, 显然 $\left\|e^{(k)}\right\| = 1$, 并且

$$\sup_{n\geq 1}|a_n| = \sup_{k\geq 1}\left\|Ae^{(k)}\right\| \leq \|A\|.$$

(2) 充要条件的两端都蕴含了 $a_n \neq 0 (\forall n \geq 1)$, 此时由 A 的定义不难看出 $A^{-1}\{x_n\} = \{\frac{x_n}{a_n}\}$. 因此由 (1) 可得 (2).

(3) 必要性: 反设 $a_n \nrightarrow 0$, 也即存在 $\mathbb{N}$ 的无穷子集 K 使得 $|a_n| \geq \varepsilon_0 > 0 (\forall n \in K)$. 若令 $A_1 = A\big|_K$ 是 $l^1(K)$ 上的线性算子, 则根据 $\inf\limits_{n\in K}|a_n| \geq \varepsilon_0 > 0$ 以及 (2) 可得 $A_1^{-1} \in L(l^1(K))$. 但由习题 3.1.1 知无穷维 Banach 空间上的紧算子没有有界逆, 矛盾.

充分性: 设 $a_n \to 0$. 定义

$$A_kx = (a_1x_1, \cdots, a_kx_k, 0, \cdots), \quad \forall x \in l^1.$$

不难验证 A_k 是有穷秩算子, 并且

$$\|A-A_k\| = \sup_{\|x\|=1}\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_nx_n| \le \sup_{n>k}|a_n|,$$

在上式中令 $k\to\infty$ 可得 $\|A-A_k\|=0$, 因此 $A\in\mathfrak{C}(l^1)$.

✍ **题目3.3.2.** 在 $C[0,1]$ 中, 考虑映射

$$T: x(t)\mapsto \int_0^t x(s)\mathrm{d}s,\quad \forall x(t)\in C[0,1].$$

(1) 求证: T 是紧算子.

(2) 求 $\sigma(T)$ 及 T 的一个非平凡的闭不变子空间.

解答. (1) 记 B 为 $C[0,1]$ 中的单位球, 则由

$$\|Tx\|\le\|x\|\le 1,\quad \forall x\in B,$$
$$\left|\int_0^{t_1}x(s)\mathrm{d}s-\int_0^{t_2}x(s)\mathrm{d}s\right|\le|t_1-t_2|,\quad \forall x\in B,$$

知 TB 一致有界且等度连续, 根据 Arzela-Ascoli 定理, TB 在 $C[0,1]$ 中列紧, T 是紧算子.

(2) 注意到

$$\left\|T^n\right\| = \sup_{\|x\|=1}\left\|\int\cdots\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n-1}\le t\le 1} x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\right\| \le \frac{1}{n!},$$

因此根据 Gelfand 定理, $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=0$. 再由无穷维 Banach 空间上紧算子无有界逆可得 $\sigma(T)=\{0\}$.

$\overline{\{P(T)x: x\in C[0,1]\}}$ 是 T 的非平凡闭不变子空间, 其中 P 是任意多项式.

✍ **题目3.3.3.** 设 $A\in\mathfrak{C}(X)$, 求证: $x-Ax=0$ 只有零解当且仅当 $x-Ax=y$ 对 $\forall y\in X$ 都有解.

解答. 若记 $T=I-A$, 此即证明 $N(T)=\{0\}\iff R(T)=X$, 必要性书上已有证明, 只需

证充分性. 若 $R(T)=X$, 由 Riesz-Fredholm 定理,

$$N(T^*)=R(T)^{\perp}=X^{\perp}=\{0\} \Longrightarrow \dim N(T)=\dim N(T^*)=0,$$

因此 $N(T)=\{0\}$.

✍ **题目3.3.4.** 设 $T\in L(X)$, 并存在 $m\geq 0$ 使得

$$X=N(T^m)\oplus R(T^m),$$

求证: $p(T)=q(T)\leq m$.

解答. 首先证明 $q=q(T)\leq m$. $\forall x\in X$, 存在 $y\in N(T^m), z\in X$ 使得

$$x=y+T^m z.$$

从而 $T^m x=T^m y+T^{2m}z=T^{2m}z\in R(T^{m+1})$. 因此 $R(T^m)=R(T^{m+1})$, $q\leq m$.

下面证明 $p=p(T)\leq q\leq m$. 由 $N(T^m)\cap R(T^q)=\{0\}$ 知如果 $T^q x\in N(T^m)$, 也即 $T^{m+q}x=0$, 则 $T^q x=0$, 此即 $N(T^{m+q})\subset N(T^q)$, 因此 $N(T^q)=N(T^{q+1})$, $p\leq q$.

最后证明 $q\leq p$. 因为 $X=N(T^p)\oplus R(T^q)$, 故 $\forall x\in X$, 存在 $y\in N(T^p), z\in X$ 使得

$$x=y+T^q z.$$

从而 $T^p x=T^p y+T^{p+q}z=T^{p+q}z\in R(T^{p+1})$. 故 $R(T^p)=R(T^{p+1})$.

✍ **题目3.3.5.** 设 $A,B\in L(X)$ 并且 $AB=BA$. 求证:

(1) $R(A)$ 和 $N(A)$ 都是 B 的不变子空间.

(2) $R(B^n)$ 和 $N(B^n)$ 都是 B 的不变子空间 ($\forall n\in\mathbb{N}$).

解答. (1) 若 $Ax\in R(A)$, 则 $B(Ax)=A(Bx)\in R(A)$, 从而 $B(R(A))\subset R(A)$.

若 $x\in N(A)$, 则 $A(Bx)=B(Ax)=0 \Longrightarrow Bx\in N(A)$, 从而 $B(N(A))\subset N(A)$.

(2) 若 $B^n x\in R(B^n)$, 则 $B(B^n x)=B^n(Bx)\in R(B^n)$.

若 $x\in N(B^n)$, 则 $B^n x=0 \Longrightarrow B^n(Bx)=0 \Longrightarrow Bx\in N(B^n)$.

✍ **题目3.3.6.** 设 $A\in L(X), M$ 是 A 的有限维闭不变子空间, 求证:

(1) A 在 M 上的作用可以用一个矩阵来表示;

(2) M 中存在 A 的特征元.

解答. (1) 设 $M=\operatorname{span}\{e_k\}_1^n$. 记

$$Ae_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j(i=1,\cdots,n),\quad \boldsymbol{A}=(a_{ij}).$$

则 $\forall x=\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i e_i$, 都有

$$Ax=\sum_{j=1}^n e_j\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\alpha_i\right)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}.$$

(2) 设 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$. 则沿用 (1) 中的记号, 有

$$A(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{e})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{e}).$$

✍ **题目3.3.7.** 设 $x_0\in X, f\in X^*$ 满足 $f(x_0)=1$. 令 $A=x_0\otimes f, T=I-A$, 求 T 的零链长 p.

解答. 由于 A 是紧算子, 故 $p(T)=q(T)<\infty$. 若 $X=\mathbb{K}x_0$, 则 $R(T)=\mathbb{K}x_0=X$, $p(T)=q(T)=0$. 若 $\mathbb{K}x_0\subsetneqq X$, 则 $R(T^2)=R(T)=\mathbb{K}x_0\subsetneqq X$, $p(T)=q(T)=1$.

B.3.4 Hilbert-Schmidt 定理

(本节各题中, H 均指复 Hilbert 空间)

✍ **题目3.4.1.** 设 $A\in L(H)$, 求证 $A+A^*, AA^*, A^*A$ 都是对称算子, 并且

$$\|AA^*\|=\|A^*A\|=\|A\|^2.$$

解答. 注意到 $\forall x, y \in H$,

$$((A+A^*)x, y) = (Ax, y) + (A^* x, y) = (x, A^* y) + (x, Ay) = (x, (A+A^*)y),$$
$$(AA^* x, y) = (A^* x, A^* y) = (x, AA^* y),$$
$$(A^* Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^* Ay),$$

并且

$$\|AA^*\| = \sup_{\|x\|=1} |(AA^* x, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(A^* x, A^* x)| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2,$$
$$\|A^* A\| = \sup_{\|x\|=1} |(A^* Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, Ax)| = \|A\|^2.$$

✍ **题目3.4.2.** 设 $A \in L(H)$, 满足 $(Ax, x) \geq 0 (\forall x \in H)$, 且

$$(Ax, x) = 0 \iff x = 0,$$

求证:

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\|(Ax, x), \quad \forall x \in H.$$

解答. 不妨设 $\|A\| = 1, \|x\| = 1$. 由题目条件可知 $(x, y)_A = (Ax, y) (\forall x, y \in H)$ 构成一个 H 上的内积, 因此由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\left|(Ax, y)\right|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y), \quad \forall x, y \in H.$$

在上式中取 $y = Ax$, 则

$$\|Ax\|^2 \leq (Ax, x)(A^2 x, Ax) \leq (Ax, x), \quad \forall \|x\| = 1.$$

✍ **题目3.4.3.** 设 A 是 H 上的有界对称算子, 令

$$m(A) \triangleq \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M(A) \triangleq \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

求证:

(1) $\sigma(A)\subset[m(A),M(A)]$, 且 $m(A),M(A)\in\sigma(A)$.

进一步假设 A 是 H 上的对称紧算子, 求证:

(2) 若 $m(A)\neq 0$, 则 $m(A)\in\sigma_p(A)$;

(3) 若 $M(A)\neq 0$, 则 $M(A)\in\sigma_p(A)$.

解答. (1) 不妨设 $|M(A)|\geq|m(A)|$(否则令 $A\mapsto -A$), 则 $\sigma(A)\subset(-\infty,\|A\|]=(-\infty,M(A)]$. 令 $A_k=A-kI$, 则当 k 充分大时, $m(A_k)=-\|A_k\|$, 从而 $\sigma(A_k)\subset[m(A_k),\infty)$. 注意到 $m(A_k)=m(A)-k$, 因此 $\sigma(A)=\sigma(A_k)+k\subset[m(A_k)+k,\infty)=[m(A),\infty)$.

(2)(3) 不妨设 $|M(A)|\geq|m(A)|$. 此时由 A 是对称紧算子知 $M(A)\in\sigma_p(A)$. 令 $A_k=A-kI$, 当 k 充分大时, 有 $m(A_k)=-\|A_k\|$, 从而 $m(A_k)\in\sigma_p(A_k)$, 故

$$m(A)=m(A_k)+k\in\sigma_p(A_k)+k=\sigma(A).$$

✍ **题目3.4.4.** 设 A 是对称紧算子, 求证:

(1) 若 A 非零, 则 A 至少有一个不等于零的特征值;

(2) 若 M 是 A 的非零不变子空间, 则 M 上必含有 A 的特征元.

解答. (1) 若 A 非零, 则 $m(A)$ 和 $M(A)$ 至少有一个非零 (沿用上题记号), 由上题知, $m(A)$ 和 $M(A)$ 中至少有一个是 A 的非零特征值.

(2) 由于 $A_1=A\big|_M$ 仍是对称紧算子, 因此由 (1), M 上必有 A 的特征元.

✍ **题目3.4.5.** 求证: 为了 $P\in L(H)$ 是一个正交投影算子, 必须且仅须:

(1) P 是对称的, 即 $P=P^*$;

(2) P 是幂等的, 即 $P^2=P$.

解答. 必要性显然, 只证明充分性. 记 $M=\{x\in H:Px=x\}$, 则 M 是闭子空间. 注意到 $\forall x\in X$, $Px\in M$ 并且

$$(x-Px,y)=(x,y)-(Px,y)=(x,y)-(x,Py)=0,\quad \forall y\in M,$$

因此 $x-Px\perp M$, P 是 M 对应的正交投影算子.

✍ **题目3.4.6.** 为了 $P\in L(H)$ 是一个正交投影算子, 必须且仅须:

$$(Px,x)=\|Px\|^2,\quad \forall x\in H.$$

解答. 必要性:

$$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x),\quad \forall x\in H.$$

充分性: 由上题, 只需证明 P 是对称且幂等的. 由于 $(Px,x)=\|Px\|^2\in\mathbb{R}(\forall x\in H)$, 因此 P 是对称的. 由于 P 是对称的, 因此 $P-P^2$ 也是对称的, 从而

$$\begin{aligned}\left\|P-P^2\right\|&=\sup_{\|x\|=1}\left|((P-P^2)x,x)\right|=\sup_{\|x\|=1}\left|(Px,x)-P(^2x,x)\right|\\&=\sup_{\|x\|=1}\left|(Px,x)-\|Px\|^2\right|=0,\end{aligned}$$

从而 $P^2=P$.

✍ **题目3.4.7.** 设 $A\in L(H)$, 称其为正算子, 是指

$$(Ax,x)\ge 0,\quad \forall x\in H.$$

求证:

(1) 正算子必是对称的;

(2) 正算子的一切特征值都是非负实数.

解答. (1) 由 $(Ax,x)\in\mathbb{R}(\forall x\in H)$ 可知.

(2) 设 $Ax=\lambda x(x\neq 0)$, 则

$$\lambda(x,x)=(\lambda x,x)=(Ax,x)\ge 0,$$

从而 $\lambda\ge 0$.

✍ **题目3.4.8.** 求证: 为了 H 的闭线性子空间 L,M 满足 $L\subset M$, 必须且仅须 P_M-P_L 是正算子.

解答. 注意到若 P 是正交投影算子, 则

$$\|x-Px\|^2=\|x\|^2-2(Px,x)+\|Px\|^2=\|x\|^2-(Px,x),\quad \forall\in H,$$

故

$$L\subset M \iff \rho(x,L)\ge\rho(x,M) \iff \|x-P_Lx\|\ge\|x-P_Mx\|$$
$$\iff (P_Mx,x)\ge(P_Lx,x) \iff P_M-P_L \text{ 是正算子.}$$

✍ **题目3.4.9.** 设 $(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots)$ 满足 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2<\infty$, 在 l^2 空间上, 定义映射

$$A:x=\{x_j\}\mapsto y=\{y_j\},\quad \text{其中} y_i\triangleq\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j(i=1,2,\cdots).$$

求证:

(1) A 是 H 上的紧算子;

(2) 又若 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}(i,j=1,2,\cdots)$, 则 A 是对称算子.

解答. (1) 定义

$$A_nx=(y_1,\cdots,y_n,0,\cdots),\quad \forall x\in l^2.$$

显然 A_n 是有穷秩算子. 并且有

$$\|A-A_n\|^2=\sup_{\|x\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right|^2\le\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2\to0,$$

因此 A 是紧算子.

(2) 任取 $x\in l^2$, 有

$$\begin{aligned}(Ax,x)&=\sum_{i=1}^{\infty}y_i\overline{x_i}=\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\overline{x_i}=\sum_{i,j=1}^{\infty}\overline{a_{ji}}x_j\overline{x_i}\\&=\overline{\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ji}x_i\overline{x_j}}=\overline{\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\overline{x_i}}=\overline{(Ax,x)},\end{aligned}$$

故 $(Ax,x)\in\mathbb{R}(\forall x\in l^2)$, A 是对称的.

✍ **题目3.4.10.** 设 A 是 H 上的对称算子, 并且存在一组由 A 的特征元组成的 H 的正交规范基. 又设

(1) $\dim N(\lambda I-A)<\infty,\quad \forall\lambda\in\sigma_p(A)\setminus\{0\}$;

(2) $\forall\varepsilon>0,\sigma_p(A)\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]$ 只有有限个值.

求证: A 是 H 上的紧算子.

解答. 由 (1)(2), A 至多有可数个特征值, 且至多以 0 为聚点, 除 0 以外按照重数记为 $\{\lambda_n\}_1^N$. 记 λ_n 对应的特征向量为 e_n(同一特征值的不同特征向量取为相互正交的), $N(A)$ 的一组正交基为 $\{e_j^0: j\in J\}$. 令

$$A_k: x=\sum_{j\in J}a_je_j^0+\sum_{n=1}^{N}a_ne_n\mapsto\sum_{n=1}^{\min\{k,N\}}a_n\lambda_ne_n,$$

其中 $N\in\mathbb{N}$ 或 $N=\infty$. 若 $N<\infty$, 则 A 是有穷秩算子, 当然是紧算子. 若 $N=\infty$, 则

$$\|A-A_k\|^2=\sup_{\|x\|=1}\left\|\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n\lambda_n\right\|^2\le\sup_{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\le1}\sum_{n=k+1}^{\infty}|\lambda_na_n|^2\le\sup_{n>k}|\lambda_n|,$$

在上式中令 $k\to\infty$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ 知不等式最后一项趋于 0, 从而 $A_k\rightrightarrows A$, A 是紧算子.

B.3.5 对椭圆型方程的应用

✍ **题目3.5.1.** 设 $a_i\in C^1(\overline{\Omega})(1\le i\le n), U\in C(\overline{\Omega})$, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中边界光滑的有界开区域, 讨论下列边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_iu)_{x_i}+Uu=f, & x\in\Omega,\\ u\big|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

解答. 该问题的弱解为 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega Du\cdot Dv-\sum_{i=1}^{n}a_iuv_{x_i}+Uuv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\quad\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

取充分大的 $\mu>0$, 令

$$a(u,v):=\int_\Omega Du\cdot Dv-\sum_{i=1}^n a_i u v_{x_i}+(U+\mu)uv\mathrm{d}x,\quad u,v\in H_0^1(\Omega).$$

则不难看出 $a(\cdot,\cdot)$ 满足 Lax-Milgram 定理的条件, 故存在唯一的具有有界逆的 $A\in L(H_0^1(\Omega))$ 使得

$$a(u,v)=(Au,v),\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

注意到 $a(\cdot,\cdot)$ 实际上是 $H_0^1(\Omega)$ 上与一般内积等价的内积, 记为

$$(u,v)_\mu:=(Au,v)_{H_0^1(\Omega)},\quad \|u\|_\mu:=\big((u,u)_\mu\big)^{\frac{1}{2}}.$$

因此问题的解等价于 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$(u,v)_\mu-\mu\int_\Omega uv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

注意到对给定的 $u\in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega uv\mathrm{d}x$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 故存在唯一的 $w\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega uv\mathrm{d}x=(w,v)_\mu,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

定义 $K_\mu: L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega), w\mapsto u$. 则

$$\int_\Omega uv\mathrm{d}x=(K_\mu u,v)_\mu,\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

故该问题的解还等价于 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$(u,v)_\mu-\mu(K_\mu u,v)_\mu=(K_\mu f,v)_\mu),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

此即

$$(I-\mu K_\mu)u=K_\mu f.$$

由于 $K_\mu\in L(L^2(\Omega),H_0^1(\Omega))$, 而 $H_0^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的单位映射是紧算子, 故 $K_\mu\in\mathfrak{C}(H_0^1(\Omega))$.

此时 K_μ 还是对称的, 因为

$$(K_\mu u, v)_\mu = \int_\Omega uv\mathrm{d}x = (u, K_\mu v)_\mu, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

从而 K_μ 是对称紧算子. 根据 Riesz-Fredholm 定理, 算子方程

$$(I - \mu K_\mu)u = K_\mu f$$

有解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 当且仅当 $K_\mu f \in R(I - \mu K_\mu)$. 注意到

$$R(I - \mu K_\mu) = N((I - \mu K_\mu)^*)^\perp = N(I - \mu K_\mu)^\perp,$$

因此该问题有解当且仅当 $K_\mu f \in N(I - \mu K_\mu)^\perp$.

注意到

$$u \in N(I - \mu K_\mu) \iff u = \mu K_\mu u \iff (u, v)_\mu = \mu \int_\Omega uv\mathrm{d}x (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

上式右端等价于

$$\int_\Omega Du \cdot Dv - \sum_{i=1}^n a_i u v_{x_i} + Uuv\mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

因此 $u \in N(I - \mu K_\mu)$ 当且仅当 u 是问题中方程所对应齐次方程的解.

若 $N(I - \mu K_\mu) = \{0\}$, 则齐次方程只有零解, 此时 $N(I - \mu K_\mu)^\perp = H_0^1(\Omega)$, 方程存在唯一解.

若 $N(I - \mu K_\mu) \neq \{0\}$, 由于 K_μ 是紧算子, $\dim N(I - \mu K_\mu) < \infty$. 记

$$\mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^m = N(I - \mu K_\mu).$$

则 $K_\mu f \in N(I - \mu K_\mu)^\perp$ 当且仅当

$$(K_\lambda f, \varphi_k)_\mu = 0, \quad k = 1, \cdots, m,$$

再根据 K_μ 的定义, 当且仅当 $\int_\Omega f\varphi_k \mathrm{d}x = 0 (1 \le k \le m)$. 此时方程有解, 解空间维数为 m.

综上, 该方程对应的齐次方程 (即 $f = 0$ 时的方程) 的解空间是有限维的, 记其维数为 m, 解空间的基为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$. 当 $m = 0$ 时, 方程对 $\forall f \in L^2(\Omega)$ 均存在唯一解; 当 $m > 0$ 时, 方程有解当且仅当 $\int_\Omega f\varphi_k \mathrm{d}x = 0 (1 \le k \le m)$, 并且此时解空间维数是 m.

✍ **题目3.5.2.** 在上题中, 讨论下列特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i u)_{x_i} + Uu = \lambda u, \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

解答. 记 $\mu = \|U\|_{C(\overline{\Omega})}$, 并令

$$(u, v)_\mu = \int_\Omega Du \cdot Dv + (U + \mu) uv \mathrm{d}x, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

与上题同样定义 K_μ, 则本题的弱解问题等价于寻找非零的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$u = (\lambda + \mu) K_\mu u.$$

故问题有解等价于 $\frac{1}{\lambda+\mu} \in \sigma_p(K_\mu)$.

下面求 K_μ 的特征值. 若 u 是对应于特征值 ν 的特征元, 则

$$\nu (u, u)_\mu = (K_\mu u, u)_\mu = \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x > 0,$$

从而 $\sigma_p(K_\mu) \subset (0, \infty)$. 注意到 K_μ 是对称紧算子, 根据 Hilbert-Schmidt 定理, K_μ 的特征值是可数个趋于 0 的正数.

由于该问题的特征值就是 K_μ 特征值的倒数, 该问题的特征值必存在, 并且是可数个趋于无穷的正数.

B.4 广义函数与 Sobolev 空间

B.4.1 广义函数的概念

✍ **题目4.1.1.** 设 $1 \le p < \infty$, 求证: $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

解答. 由于对任意 $u \in L^p(\Omega)$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset \Omega$ 使得

$$\|u\|_{L^p(\Omega\setminus K)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由定理4.1.3和定理4.1.5, 存在 $\delta > 0$ 使得 $(u\chi_K)_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$, 并且

$$\left\|u\chi_K - (u\chi_K)_\delta\right\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故

$$\left\|u - (u\chi_K)_\delta\right\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega\setminus K)} + \left\|u\chi_K - (u\chi_K)_\delta\right\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

✍ **题目4.1.2.** 求证: δ 函数不是局部可积函数.

解答. 反设 δ 是局部可积函数, 则存在 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

由上题可知, 存在 $\varphi \in C_0^\infty(B(0,2))$ 使得 $\varphi_m(0) = 1$ 并且 $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi_m - \chi_{B(0,\frac{1}{m})}\right|\mathrm{d}x < \frac{1}{m}$. 带入上式, 则

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_m \mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f|\cdot\left|\varphi_m - \chi_{B(0,\frac{1}{m})}\right| + |f|\cdot\left|\chi_{B(0,\frac{1}{m})}\right|\mathrm{d}x \\ &\le \frac{\|f\|_{L^1(B(0,2))}}{m} + \|f\|_{L^1(B(0,\frac{1}{m}))} \to 0, \end{aligned}$$

矛盾.

✍ **题目4.1.3.** 设

$$f_j(x) = \left(1 + \frac{x}{j}\right)^j, \quad j = 1, 2, \cdots, x \in \mathbb{R},$$

求证: $f_j(x) \to e^x$ $(\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$.

解答. 设 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$, 则

$$\left|\langle f_j - e^x, \varphi\rangle\right| \le \|\varphi\|_{C[-R,R]} \int_{-R}^{R} \left|f_j(x) - e^x\right| \mathrm{d}x,$$

由于 f_j 在有界区间上一致收敛到 e^x, 上式右端趋于 0.

✍ **题目4.1.4.** 在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 中, 求证:

(1) $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x), \varepsilon \to 0^+$;

(2) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \to \delta(x), t \to 0^+$.

解答. (1) 取 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, 并设 $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$, 则

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} - \delta, \varphi \right\rangle\right| \le \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right|}{x^2+\varepsilon^2} \mathrm{d}x \\
\le & \frac{\varepsilon}{\pi} \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-R}^{R} \frac{|x|}{x^2+\varepsilon^2} \mathrm{d}x = \frac{\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\pi} \varepsilon \log\left(1 + \frac{R^2}{\varepsilon^2}\right) \to 0.
\end{aligned}$$

(2) 沿用 (1) 的假设, 则

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \delta, \varphi \right\rangle\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-R}^{R} \left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{d}x \\
\le & \frac{\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-R}^{R} |x| e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{d}x = 2\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4t}}\right) \to 0.
\end{aligned}$$

✍ **题目4.1.5.** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, 又设 K 是 Ω 的一个紧子集, 求证: 存在一个函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $0 \le \varphi \le 1$ 且 φ 在 K 的一个邻域内恒为 1.

解答. 取紧集 C 满足 $K \subset C \subset \Omega$ 并且 $d(\partial K, \partial C) > 0$, 则当 $\delta > 0$ 充分小时, $(\chi_C)_\delta$ 满足条件.

B.4.2 B_0 空间

✍ **题目4.2.1.** 验证: 在例 4.2.6 中, $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的收敛性与紧集列 $\{K_m\}$ 的特殊选择无关.

解答. 设还有一串满足条件的紧集 $\{C_k\}$. 若关于 $\{K_m\}$ 有 $\varphi_j \to 0$, 任取 $\varepsilon > 0, k \ge 1$, 存

在充分大的 m_1 使得 $C_k \subset K_{m_1}$. 令 $m_0 = \max\{m_1, k\}$, 则

$$\max_{x\in C_k}\left|\partial^\alpha \varphi_j(x)\right| \le \max_{x\in K_{m_0}}\left|\partial^\alpha \varphi_j(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall|\alpha| \le k, j > N(\varepsilon, m_0).$$

因此关于 $\{C_k\}$ 也有 $\varphi_j \to 0$. 该收敛与 $\{K_m\}$ 的选取无关.

✍ **题目4.2.2.** 设 $\|\varphi\|'_m = \sup\limits_{|k|,|\alpha|\le m, x\in\mathbb{R}^n}\left|x^k\partial^\alpha\varphi(x)\right|, m \ge 0$. 求证: $\|\cdot\|'_m$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的等价可数范数.

解答. 容易验证线性空间 X 上 $\|\cdot\|_m$ 和 $\|\cdot\|'_m$ 等价当且仅当 $\forall m, m' \ge 1$, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|x\|_m \le C\|x\|'_{m'}, \quad ,\|x\|'_m \le C\|x\|_{m'}, \quad \forall x \in X,$$

上式对题中所给范数显然成立.

参考文献

[1] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (上).

[2] Walter Rudin. Functional Analysis.

[3] 林源渠. 泛函分析学习指南.

[4] J. Dieudonne. Treatise on Analysis.

[5] Walter Rudin. Principle of Mathematical Analysis.

[6] Teschl G. Functional Analysis (Lecture Notes).

[7] Lawrence C. Evans. Partial Differential Equations.

[8] Kôsaku Yosida. Functional Analysis.